NÁZOV	**Teória grafov**
TEMATICKÝ CELOK	Diskrétna matematika
MENO A ADRESA NAVRHOVATEĽA	Janka Melušová jmelusova@ukf.sk
CIEĽ	úvod do teórie grafov
CHARAKTERISTIKY	5 hodín vek študentov: 15+
ZDROJE	pripravené autorkou
POZNÁMKY PRE UČITEĽA	elementárne poznatky teórie grafov majú jednoduchú podstatu ale silnú matematickú výpoveď

Tento projekt je podporený Európskou Úniou v rámci Programu Celoživotného vzdelávania (539234-LLP-1-2013-1-AT-COMENIUS-CAM). Za obsah tejto stránky zodpovedajú autori a komisia nenesie žiadnu zodpovednosť za použitie informácií na uverejnených na tejto stránke.

Základné pojmy teórie grafov

(8. ročník, druhá hodina tematického celku)

Ciele

Žiaci by sa mali na hodine naučiť:

- zistiť niektoré vlastnosti grafov
    - súvislosť,
    - pravidelnosť,
    - kompletnosť.
- zistiť stupeň vrcholov v grafe.

Východiská

Žiaci už z predchádzajúcej hodiny poznajú pojem graf, vrchol grafu, hrana grafu, súvislosť grafu. Medzi ďalšie pojmy v učebnici patrí aj pojem pravidelného a kompletného grafu. Tieto zavedieme na tejto hodine.

Organizácia hodiny

Žiaci sú rozdelení do skupín po troch (resp. po dvoch). Po úvode hodiny, kedy sa vysvetlia nové pojmy, žiaci dostanú príslušné materiály na skupinovú prácu.

Pomôcky

Súbor kartičiek A (diagramy grafov)*
Súbor kartičiek B (vlastnosti grafov)

Potrebný čas

cca 40 minút

* výhodné je pripraviť tento súbor kartičiek na výkres alebo iný tvrdý papier, môžu sa používať dlhodobo

Navrhovaný postup

Úvod hodiny

Ak sú žiaci nie sú zvyknutí na skupinovú prácu, môže úvod zabrať viac času. Rozdeľte žiakov do trojčlenných (resp. dvojčlenných) skupín.
Formou hromadnej diskusie zopakujte so žiakmi učivo z minulej hodiny, pokúste sa sformulovať, čo je graf (nie definovať, je to primitívny pojem, tak ako bod, priamka, rovina v geometrii).

Skupinová práca

Rozdajte do skupín súbor **kartičiek A**.
Úlohy:
1. Rozdeľte grafy na súvislé a nesúvislé (poznačte si rozdelenie).

Zamiešajte kartičky.
2. Rozdeľte grafy na pravidelné a tie, ktoré pravidelné nie sú (poznačte si rozdelenie).
3. Nájdite všetky kompletné grafy (poznačte si, ktoré to boli).

Nechajte kartičky rozložené tak, ako sú.

Počas práce skontrolujte, či žiaci majú grafy správne rozdelené. Ak nájdete niektorý graf nesprávne zaradený, spýtajte sa: „Prečo si myslíte, že tento graf je súvislý/pravidelný/...?“ Takto isto sa spýtajte aj na správne zaradený graf.

Hromadná diskusia

Sú kompletné grafy iba v jednej skupine (pravidelné - nepravidelné)?
V ktorej skupine sú?
Sú všetky kompletné grafy (nielen tie, ktoré máme na kartičkách) pravidelné? Prečo?
Ak označíme počet vrcholov pravidelného grafu n, aký stupeň majú všetky vrcholy pravidelného grafu?

Skupinová práca

Rozdajte do skupín súbor **kartičiek B**. Do súboru B budú žiaci dopisovať niektoré údaje.
Úlohy:
1. Vytvorte dvojice kartička A – kartička B. *
2. Doplňte chýbajúce údaje do kartičiek B.
3. Nájdite graf, ktorý spĺňa požiadavky uvedené na kartičke B, ktorú ste nevedeli priradiť.

Hromadná diskusia

Prezentácia výsledkov: „Hovorca“ každej skupiny prezentuje nájdený graf.
Sú grafy rovnaké? (príprava na zavedenie pojmu izomorfizmu grafov)

Domáca úloha

Pokúste sa vymyslieť také podmienky na kartičke B, aby takýto graf neexistoval a odôvodnite prečo neexistuje.

---

* Kartičiek B je viac ako kartičiek A. Jedna z kariet B je nevyplnená. Súbor kartičiek je konštruovaný tak, aby voľné zostali vyplnené kartičky.

Základné pojmy teórie grafov

(8. ročník, tretia hodina tematického celku)

Ciele

Žiaci by sa mali na hodine naučiť:

- rozhodnúť, či graf obsahuje otvorený alebo uzavretý eulerovský ťah alebo ani jeden,
- sformulovať nutnú podmienku pre existenciu eulerovského ťahu v grafe.

Východiská

Žiaci už z predchádzajúcej hodiny poznajú pojem graf, vrchol grafu, hrana grafu, súvislosť grafu, pravidelný graf, kompletný graf, určiť stupeň vrcholu grafu.

Organizácia hodiny

Žiaci sú rozdelení do skupín po troch (resp. po dvoch).

Pomôcky

Súbor kartičiek A (diagramy grafov)*
Veľa papiera na neúspešné pokusy

Potrebný čas

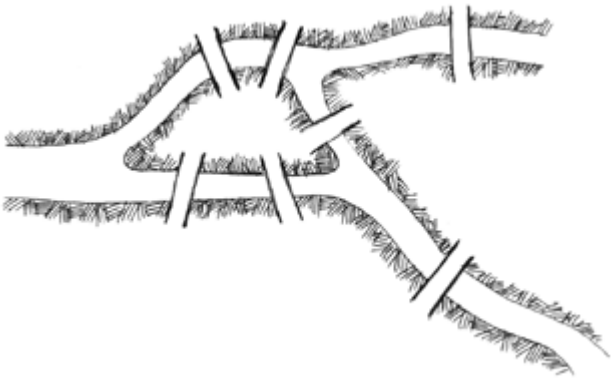
cca 40 minút

* výhodné je pripraviť tento súbor kartičiek na výkres alebo iný tvrdý papier, môžu sa používať dlhodobo

Navrhovaný postup

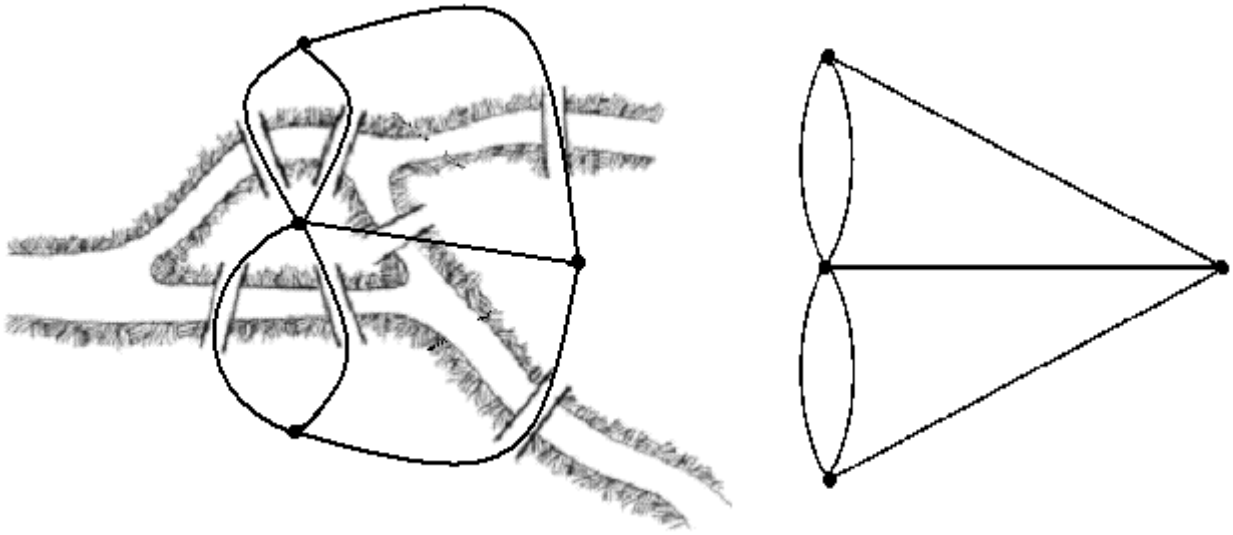
Úvod hodiny

Rozdeľte žiakov do trojčlenných (resp. dvojčlenných) skupín.
Formou hromadnej diskusie zopakujte so žiakmi učivo z minulej hodiny, pokúste sa sformulovať, čo je graf (nie definovať, je to primitívny pojem, tak ako bod, priamka, rovina v geometrii), zopakujte prebraté pojmy. Nakreslite na tabuľu (alebo premietnite pomocou spätného projektora nasledujúci obrázok:



Povedzte žiakom nasledujúci príbeh:
Mesto Kráľovec (Kaliningrad) sa rozprestiera na brehoch rieky Pregel. Na tejto rieke sú dva ostrovy. Brehy rieky a ostrovy boli spojené siedmimi mostmi. Niekto vymyslel hádanku, či sa dá prejsť po každom moste práve raz a vrátiť sa späť na miesto, odkiaľ sme vyšli. Obyvateľov táto hádanka zaujala, pokúšali sa ju rozriešiť. Dokonca sa na výsledky jednotlivých pokusov uzatvárali aj stávky.

Skúsme Kráľovčanom pomôcť. Narozdiel od nich, my už niečo vieme o teórii grafov. Skúsme si situáciu znázorniť pomocou grafu. Vrcholmi grafu bude „pevnina“, čiže brehy rieky a ostrovy na rieke. Mosty, ktoré ich spájajú budú hranami grafu.

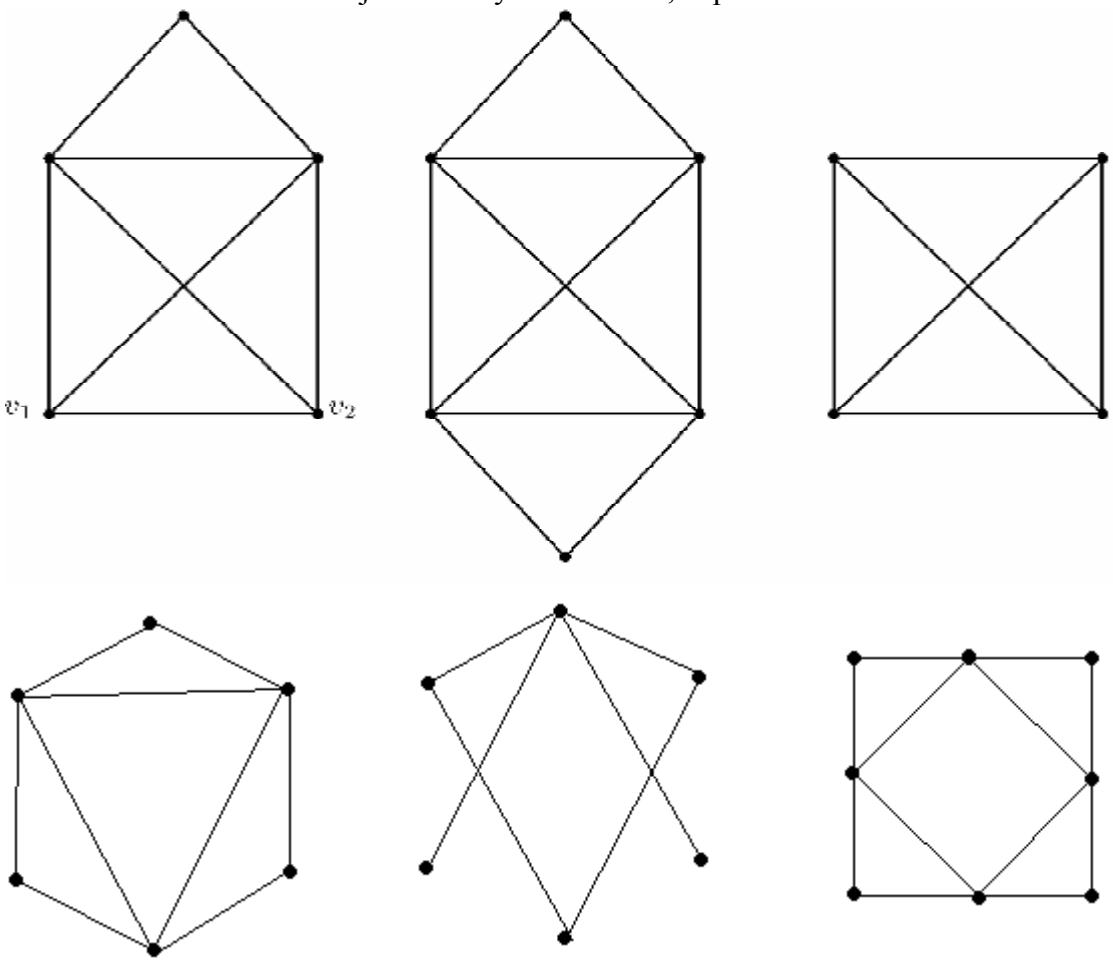


Skupinová práca

Žiaci by sa teraz mali pokúsiť nájsť takúto „prechádzku“.

Hromadná diskusia

Asi po troch minútach sa spýtajte, či sa im to podarilo. Teraz im povedzte, že už v 18. storočí švajčiarsky matematik Leonard Euler dokázal, že je to nemožné. Ale AKO to urobil? Nakreslite na tabuľu niekoľko jednoduchých obrázkov, napr.



Skupinová práca

Spýtajte sa žiakov, ktoré z obrázkov sa dajú nakresliť jedným ťahom (neprejsť po žiadnej „čiare“ dvakrát, nezdvihnúť ceruzku z papiera).

Hromadná diskusia

Nájdite akýsi konsenzus, ktoré z obrázkov sa dajú nakresliť jedným ťahom. Pri tých, ktoré sa dajú nakresliť jedným ťahom rozhodnite, či sa kreslenie obrázku skončí v tom istom vrchole, v ktorom sa začalo alebo nie. Ak by boli okolo niektorého grafu nejasnosti, vyzvite niektorého zo žiakov, aby predviedol svoj ťah.

Teraz je správny čas pomenovať grafy. Definujte pojmy eulerovský ťah (otvorený, uzavretý), eulerovský graf.

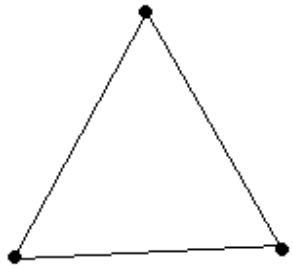
Skupinová práca

Rozdajte žiakom kartičky A1-A8. Nechajte ich rozdeliť grafy do troch skupín (eulerovský, semi-eulerovský, iný).
Nechajte žiakov zistiť stupne jednotlivých vrcholov grafov. V skupinách nech diskutujú, aké stupne vrcholov majú grafy v jednotlivých kategóriách. Počas diskusie pomôžte (vhodnými otázkami, napr. na paritu vrcholov) každej skupine, aby dospela k pravdivému záveru.
Rozdajte zvyšok kartičiek A. Aj tieto žiaci rozdelia do zmienených troch skupín, ale už na základe nájdeného kritéria. Nechajte ich overiť správnosť rozdelenia tým, že nájdu eulerovský ťah v grafoch z prvých dvoch skupín.

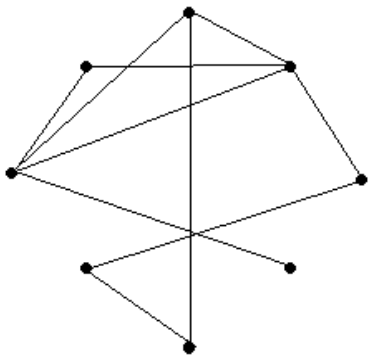
Hromadná diskusia

Nakreslite na tabuľu graf z kartičky A12 a spýtajte sa, do ktorej skupiny ho zaradili. Existuje v ňom uzavretý eulerovský ťah alebo nie? Prečo? Ak niektorá skupina bude tvrdiť, že áno, vyzvite „hovorcu“ skupiny, aby svoj ťah predviedol.
Prečo sa dá graf z kartičky A5 jedným ťahom nakresliť dá?
Nechajte žiakov prísť na to, že graf musí byť v prvom rade súvislý, aby bol eulerovský. Spresnite predtým zistené kritériá.

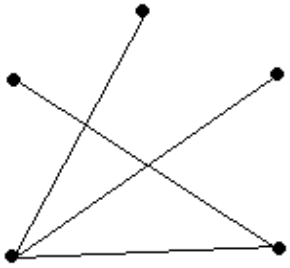
A1



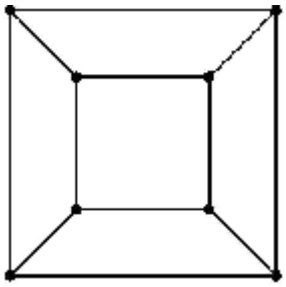
A2



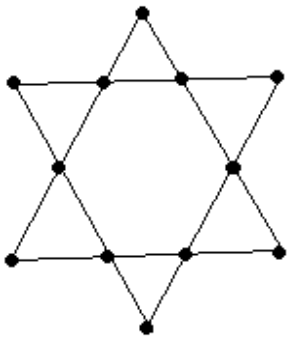
A3



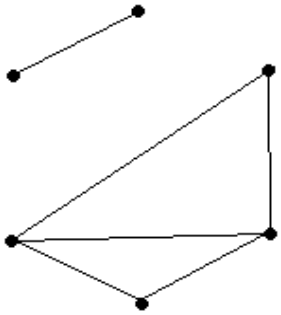
A4



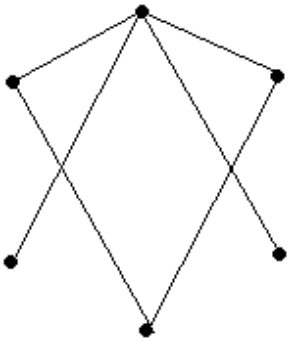
A5



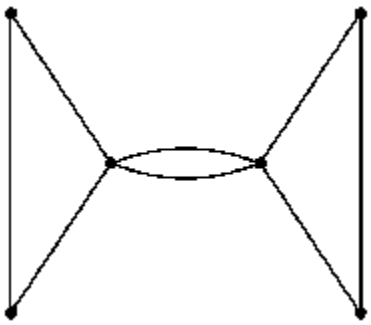
A6

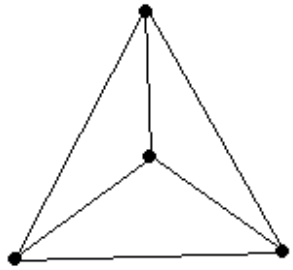
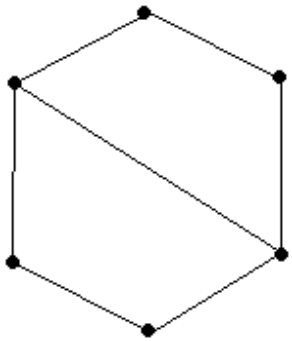
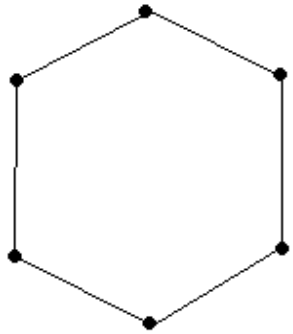
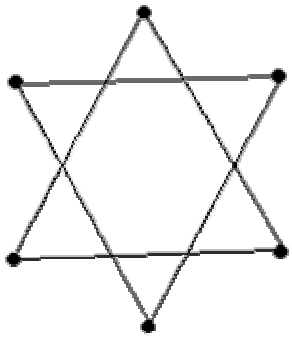
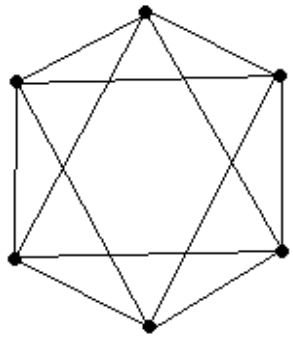
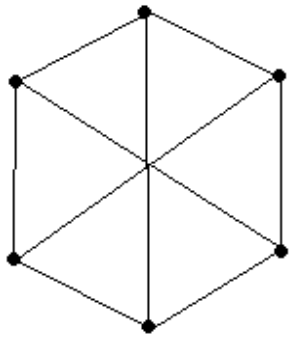
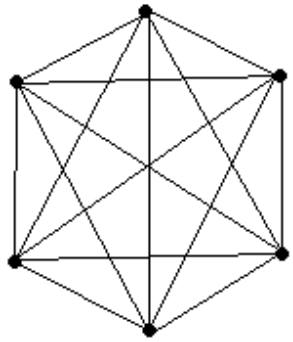
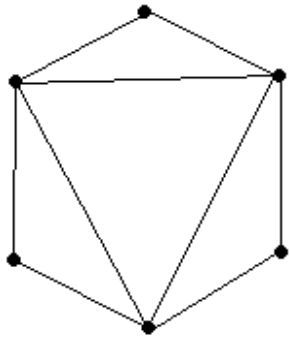


A7



A8



A9 	A10 
A11 	A12 
A13 	A14 
A15 	A16 

Počet vrcholov **6**		Počet vrcholov **6**	
Počet hrán **7**		Počet hrán	
Súvislý		Súvislý	
Pravidelný	stupňa	Pravidelný	stupňa
Kompletný		Kompletný **Áno**	
Najvyšší stupeň vr.		Najvyšší stupeň vr.	
Najnižší stupeň vr.		Najnižší stupeň vr.	
Číslo karty A:	B1	Číslo karty A:	B2
Počet vrcholov **5**		Počet vrcholov **6**	
Počet hrán		Počet hrán **6**	
Súvislý		Súvislý **Áno**	
Pravidelný	stupňa	Pravidelný **Nie**	stupňa
Kompletný **Nie**		Kompletný	
Najvyšší stupeň vr.		Najvyšší stupeň vr.	
Najnižší stupeň vr.		Najnižší stupeň vr.	
Číslo karty A:	B3	Číslo karty A:	B4
Počet vrcholov **6**		Počet vrcholov **12**	
Počet hrán **6**		Počet hrán	
Súvislý **Nie**		Súvislý	
Pravidelný	stupňa	Pravidelný	stupňa
Kompletný		Kompletný	
Najvyšší stupeň vr. **3**		Najvyšší stupeň vr.	
Najnižší stupeň vr.		Najnižší stupeň vr.	
Číslo karty A:	B5	Číslo karty A:	B6
Počet vrcholov **6**		Počet vrcholov **6**	
Počet hrán **6**		Počet hrán **6**	
Súvislý **Áno**		Súvislý **Nie**	
Pravidelný **Áno**	stupňa **2**	Pravidelný **Áno**	stupňa **2**
Kompletný		Kompletný	
Najvyšší stupeň vr.		Najvyšší stupeň vr.	

Najnižší stupeň vr.		Najnižší stupeň vr.	
Číslo karty A:	B7	Číslo karty A:	B8
Počet vrcholov		Počet vrcholov **8**	
Počet hrán		Počet hrán	
Súvislý		Súvislý	
Pravidelný **Áno**	stupňa **4**	Pravidelný **Áno**	stupňa
Kompletný **Nie**		Kompletný	
Najvyšší stupeň vr.		Najvyšší stupeň vr.	
Najnižší stupeň vr.		Najnižší stupeň vr.	
Číslo karty A:	B9	Číslo karty A:	B10
Počet vrcholov		Počet vrcholov **8**	
Počet hrán **8**		Počet hrán	
Súvislý		Súvislý	
Pravidelný	stupňa	Pravidelný **Nie**	stupňa
Kompletný		Kompletný	
Najvyšší stupeň vr.		Najvyšší stupeň vr.	
Najnižší stupeň vr.		Najnižší stupeň vr.	
Číslo karty A:	B11	Číslo karty A:	B12
Počet vrcholov		Počet vrcholov **6**	
Počet hrán		Počet hrán **9**	
Súvislý		Súvislý	
Pravidelný **Áno**	stupňa **2**	Pravidelný **Áno**	stupňa
Kompletný **Áno**		Kompletný	
Najvyšší stupeň vr.		Najvyšší stupeň vr.	
Najnižší stupeň vr.		Najnižší stupeň vr.	
Číslo karty A:	B13	Číslo karty A:	B14
Počet vrcholov **6**		Počet vrcholov **5**	
Počet hrán		Počet hrán	
Súvislý		Súvislý	
Pravidelný	stupňa	Pravidelný	stupňa

Kompletný **Áno**		Kompletný **Áno**	
Najvyšší stupeň vr.		Najvyšší stupeň vr.	
Najnižší stupeň vr.		Najnižší stupeň vr.	
Číslo karty A:	B15	Číslo karty A:	B16
Počet vrcholov **7**		Počet vrcholov **6**	
Počet hrán **9**		Počet hrán **9**	
Súvislý **Nie**		Súvislý	
Pravidelný	stupňa	Pravidelný **Nie**	stupňa
Kompletný		Kompletný	
Najvyšší stupeň vr.		Najvyšší stupeň vr.	
Najnižší stupeň vr. **1**		Najnižší stupeň vr.	
Číslo karty A:	B17	Číslo karty A:	B18

Výsledky

Číslo karty		Počet vrcholov	Počet hrán	Súvislý	Pravidelný	stupňa	Kompletný	Eulerovský ťah	Stupeň vrchola	
A	B								max	min
1	13	3	3	A	**A**	**2**	**A**	U	2	2
2	12	**8**	10	A	**N**	/	N	O	4	1
3	3	**5**	4	A	N	/	**N**	N	3	1
4	10	**8**	12	A	**A**	3	N	N	3	3
5	6	**12**	18	A	N	/	N	U	4	2
6	5	**6**	**6**	**N**	N	/	N	N	**3**	1
7	4	**6**	**6**	**A**	**N**	/	N	O	4	1
8	11	6	**8**	A	N	/	N	U	4	2
9	2	4	**6**	A	A	3	**A**	N	3	3
10	1	**6**	**7**	A	N	/	N	O	3	2
11	7	**6**	**6**	**A**	**A**	**2**	N	U	2	2
12	8	**6**	**6**	**N**	**A**	**2**	N	N	2	2
13	9	6	12	A	**A**	**4**	**N**	U	4	4
14	14	**6**	**9**	A	**A**	3	N	N	3	3
15	15	**6**	15	A	A	5	**A**	N	5	5
16	18	**6**	**9**	A	**N**	/	N	O	4	2
17	16	**5**	10	A	A	4	**A**	U	4	4
18	17	**7**	**9**	**N**	N	/	N	N	?	**1**

A - áno O - otvorený
N - nie U - uzavretý
N - žiaden

dané