NÁZOV	**Matematické skúmanie I (GEOBOARD)**
TEMATICKÝ CELOK	Geometria
MENO A ADRESA NAVRHOVATEĽA	Soňa Čeretková sceretkova@ukf.sk
CIEĽ	Úvod do netradičnej geometrie na geometrickej tabuľke (geoboard) a štvorčekového papiera
CHARAKTERISTIKY	3 hodiny vek študentov: 12+
ZDROJE	geometrická tabuľka, gumičky, štvorčekový papier, farebné ceruzky text pripravený v spolupráci so Silviou Bobulovou
POZNÁMKY PRE UČITEĽA	Skúmanie na geometrickej tabuľke odhaľuje nové pohľady na geometriu v rovine, na vlastnosti a mieru geometrických útvarov. Riešenie jednoduchých úloh umožňuje odhaliť nové aspekty geometrie rovinných útvarov.

Tento projekt je podporený Európskou Úniou v rámci Programu Celoživotného vzdelávania (539234-LLP-1-2013-1-AT-COMENIUS-CAM). Za obsah tejto stránky zodpovedajú autori a komisia nenesie žiadnu zodpovednosť za použitie informácií na uverejnených na tejto stránke.

Obsah

1 Geometrická tabuľka a doplnkové pomôcky
2 Začíname modelovať
2.1 Lietajúce obrazce
2.2 Dopravné značky
2.3 Symboly a znaky
2.4 Písmená abecedy
2.5 Číslice a matematické symboly
3 Modelujeme geometrické útvary
3.1 Trojuholníky na geometrickej tabuľke
3.2 Štvoruholníky
3.3 Modelujeme mnohouholníky
4 Modelujeme útvary so zaujímavými vlastnosťami
4.1 Súmerné útvary
4.2 Podobné útvary
4.3 Osovo a stredovo súmerné útvary
5 Modelujeme a počítame
5.1 Obsahy štvorcov a obdĺžnikov
5.2 Obsahy útvarov zložených zo štvorcov a obdĺžnikov
5.3 Trojuholníky a ich obsahy
5.4 Obsahy útvarov ohraničených diagonálnymi čiarami
6 Komplexné úlohy
7 Bodky a plochy

ZOZNAM POUŽITEJ LITERATÚRY

[1] Čeretková, S. Metamorfózna didaktika a geometrická tabuľka, Záverečná práca v rámci projektu Škola ZMENA, Centrum projektu ZMENA, Brezno, 1999

[2] Hejný, M. a kol. Teória vyučovania matematiky 2, SPN Bratislava, 1990

[3] Hyman, U. Investigations spectrum maths, Collins Educacional

[4] Fisher, R., Vince, A. Investigating maths, Basil Blackwell Ltd, 1988

[5] Learning with geoboards, Cuisenaire, New York, 1995

http://www.kidscanmakeit.com/AC0003.htm

http://literacy.kent.edu/Oasis/PACT/geoboard.html

1 GEOMETRICKÁ TABUĽKA A DOPLNKOVÉ POMÔCKY

Geometrická tabuľka je drevená alebo plastová doštička tvaru štvorca, na ktorej sú pripevnené klince alebo kolíky. Klince sú zoradené v rovnakých vzdialenostiach od seba vodorovne a zvisle tak, že tvoria štvorcovú sieť. Najčastejšie používaná tabuľka je typu 3x3. Má spolu 9 klincov, po tri vodorovne a po tri zvisle. Je možné pracovať aj s tabuľkami iných rozmerov: napr. 4x4 a pod. Práca s rozmernejšími tabuľkami poskytuje väčšie množstvo útvarov, ktoré sa dajú modelovať, ale na manipuláciu sú náročnejšie.

Geometrická tabuľka slúži predovšetkým na modelovanie rôznych rovinných útvarov. Je vynikajúcou pomôckou na preskúmanie tvarov geometrických útvarov, uhlov, obvodov, obsahov a tiež súmernosti útvarov. Pri tomto modelovaní používame tenké farebné gumičky, bežne dostupné v obchodoch.

Súčasťou zostavy pomôcok je papier s bodkovou sieťou, na ktorý sa zaznamenávajú útvary vymodelované na tabuľke. Ukážkou papiera je príloha č.1.

Pre učiteľa, ktorý sa rozhodne pracovať s geometrickými tabuľkami na hodinách matematiky, sú vhodné ďalšie pomôcky: fólia s bodkovou sieťou, farebné fixky, spätný projektor, prípadne farebné papierové modely rovinných útvarov umiestnené na nástenke alebo na magnetickej tabuli.

Ideálne pre vyučovacie hodiny orientované na prácu s geometrickou tabuľkou je, aby každý žiak maximálne však dvojica žiakov, mal svoju geometrickú tabuľku, svoj vlastný papier s bodkovanou sieťou a farebné ceruzky.

V rámci medzipredmetových vzťahov si môžu žiaci vyrobiť sami tabuľku na hodinách pracovného vyučovania.

Postupy a príprava na prácu s geometrickou tabuľkou.

- naplánujeme si čas pre žiakov, aby si mohli preskúmať geometrickú tabuľku predtým, ako ju budeme používať,
- vysvetlíme žiakom, ako sa s touto pomôckou pracuje,
- popíšeme žiakom ako majú narábať s gumičkami: ak gumičku umiestňujú na kolíky alebo ju odstraňujú, vhodné je držať prst na vrchole kolíku, ktorý je zachytený gumičkou. Minimalizuje to možnosť, aby gumičky lietali po tabuľke alebo vo vzduchu po miestnosti,
- predstavíme žiakom bodkovaný papier, na ktorý budú zaznamenávať vymodelované obrazce, Je dôležité vysvetliť žiakom, aby presne pochopili, ako sa modelované útvary prekresľujú na bodkovaný papier,
- necháme žiakov, aby sa „hrali“ s geometrickou tabuľkou na oboznámenie sa s ňou,
- po oboznámení zadávame žiakom konkrétne úlohy, začíname jednoduchými a postupujeme k zložitejším,
- ponecháme žiakom dostatok času na riešenie úloh a necháme ich objavovať riešenia.

2 ZAČÍNAME MODELOVAŤ

Tento problém sme zvolili na prvotné oboznámenie sa s geometrickou tabuľkou. Pripravili sme päť úloh, ktoré môžu slúžiť ako základné úlohy na oboznámenie sa s geometrickou tabuľkou a nácviku práce s ňou. Pri tejto aktivite sa žiaci zoznámia s geometrickou tabuľkou manuálne. Sami zistia, ako ľahko sa na nej dajú vytvárať rôzne obrazce. Žiaci majú získať zručnosť pri práci modelovaním a naučia sa, ako treba obrazce zaznamenávať na bodkovaný papier.

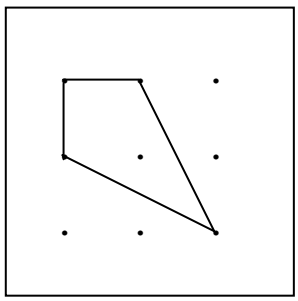
2.1 LIETAJÚCE OBRAZCE

Vytvorte na geometrickej tabuľke rôzne obrázky, geometrické tvary, o ktorých si myslíte, že „vedia lietať“.

METODICKÉ POZNÁMKY

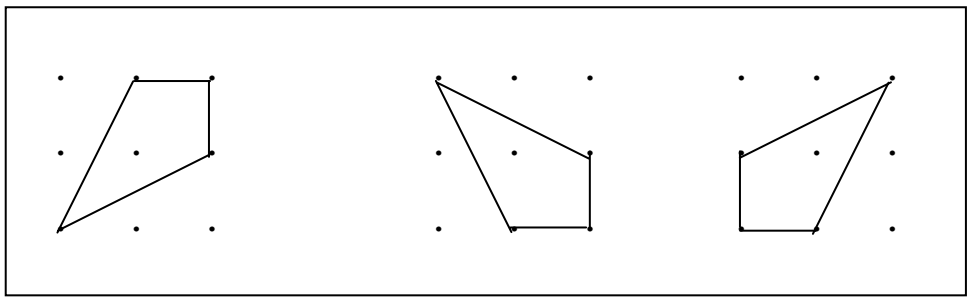
Povieme žiakom, aby vymodelovali obrazce niečoho, čo lieta a prekreslili ich na svoje bodkované papiere. Ponechajme žiakom voľnosť a dostatok času, aby mohli vymodelovať obrazce, ktoré budú spĺňať podmienku: „vie lietať“. Poskytnime im toľko gumičiek, koľko si vyžiadajú. Keď žiaci dokončia obrazce, môžeme jedného z nich vyzvať, aby ukázal svoj obrazec a porozprával o ňom.

Predpokladajme, že žiak urobil „šarkana“, ktorý je takéhoto tvaru:



Obr. č. 1

Opýtame sa, či ešte niekto urobil šarkana a všetkých poprosíme, aby ich ukázali. Treba žiakom vysvetliť, že šarkan môže byť rôzne otočený. Vyzveme preto všetkých žiakov, ktorí vymodelovali šarkana, aby predstúpili pred tabuľu a ukázali svojich šarkanov. Ich výsledky môžu byť takéto:



Obr. č. 2

Môžeme so žiakmi diskutovať o rôznych umiestneniach šarkana. Potom vyzveme žiaka, ktorý vymodeloval niečo iné, napr. motýľa, aby predstúpil pred tabuľu, ukázal svoj obrázok a pomenoval ho. Takto môžeme postupovať ďalej a ukázať všetky možné obrázky, ktoré žiaci vytvorili.

Pri práci manipulovaní žiakov s geometrickou tabuľkou si všímame ich zručnosť a tiež, s čím majú problémy. Prípadné problémy riešime individuálne, prípadne spolu so žiakmi v diskusii.

2.2 DOPRAVNÉ ZNAČKY

Vymodelujte na geometrickej tabuľke dopravné značky, ktoré poznáte.

METODICKÉ POZNÁMKY

Povieme žiakom, aby modelovali na tabuľkách dopravné značky, ktoré poznajú. Tiež ich vyzveme, aby zaznamenávali vymodelované dopravné značky na bodkovaný papier. Necháme im dostatok času na prácu s tabuľkou a na hľadanie dopravných značiek, ktoré sa dajú vymodelovať. Keď vidíme, že žiaci vyčerpali všetky svoje nápady, môžeme pristúpiť k diskusii.

Žiakom môžeme klásť tieto otázky:

Aké dopravné značky sa dajú vymodelovať?

Ktoré dopravné značky sa nedajú vymodelovať?
Kedy by sa dali vymodelovať tieto dopravné značky?

Ak niekto vymodeloval dopravnú značku, ktorú veľa ďalších žiakov nepozná, ukážeme ostatným túto dopravnú značku, aby sa s ňou oboznámili všetci žiaci a vysvetlíme, čo znamená. Takto počas celej diskusie pokračujeme až kým nevyčerpáme všetky dopravné značky, ktoré žiaci vymodelovali.

2.3 SYMBOLY A ZNAKY

Vymodelujte na geometrickej tabuľke rôzne symboly a znaky a vysvetlite ich význam.

METODICKÉ POZNÁMKY

Pri tejto aktivite žiaci spájajú fantáziu s vlastnými skúsenosťami a rôznymi poznatkami. Hľadajú symboly a znaky, ktoré sú vhodné na modelovanie. Keďže každý žiak je individuálny, aj ich práce budú rôzne. Takáto úloha sľubuje bohaté námety vymodelovaných obrazcov. Opäť necháme žiakom dostatok času, aby vyčerpali všetky svoje nápady.

V diskusii môžeme postupovať takto: Vyzveme jedného žiaka, ktorý vymodeloval napríklad hviezdu, aby ju ukázal ostatným žiakom a prekreslil na tabuľu. Potom poprosíme ďalšieho žiaka, ktorý tiež vymodeloval hviezdu, ale jej tvar je iný ako u predchádzajúceho žiaka, aby túto hviezdu tiež nakreslil na tabuľu. Takto postupujeme ďalej až kým nevyčerpáme všetky možnosti tvarov jedného symbolu, napríklad tvary, ktoré sa dajú nazvať hviezda, ktoré žiaci vymodelovali. Dbáme pritom na to, aby žiaci kreslili tvary jedného symbolu do jedného stĺpca na tabuli. Potom poprosíme iného žiaka, ktorý vymodeloval napr. šípku, aby ju ukázal ostatným a tiež prekreslil na tabuľu. Postupne vyvolávame ďalších žiakov, aby nakreslili svoje šípky na tabuľu do nového stĺpca. Takto postupujeme ďalej a na tabuli tvoríme obrázok pozostávajúci zo stĺpcov vymodelovaných obrazcov. Potom so žiakmi diskutujeme o tomto obrázku.
Kladieme im otázky:
Ktorý tvar urobilo najviac žiakov, podľa čoho to viete?
Ktorý tvar urobilo najmenej žiakov, podľa čoho to viete?

O koľko ľudí urobilo viac šípok ako hviezd?

Alebo sa opýtame žiakov, čo si všimli, keď sa pozreli na obrázok na tabuli. Môžu odpovedať:

V stĺpci so šípkami je päť šípok.

Šípok a hviezd je rovnaký počet...a podobne.

2.4 PÍSMENÁ ABECEDY

Modelujte na geometrickej tabuľke písmená abecedy.

METODICKÉ POZNÁMKY

Všetci žiaci poznajú písmená abecedy, preto ich v tejto úlohe môžeme vyzvať k tomu, aby zisťovali, či sa dajú vytvoriť na geometrickej tabuľke. Necháme žiakov, aby riešili túto úlohu. Keď žiaci dokončia prácu, môžeme s nimi začať diskusiu. V diskusii sa pýtame:

Ktoré písmena sa dali na tabuľke vymodelovať?

Ktoré písmena sa nedali vymodelovať?

2.5 ČÍSLICE A MATEMATICKÉ SYMBOLY

Vymodelujte na geometrickej tabuľke číslice (arabské a rímske) a rôzne symboly, ktoré používate v matematike.

METODICKÉ POZNÁMKY

Táto úloha už má niečo spoločné s matematikou, ale my ju uvádzame v rámci úloh na oboznamovanie sa s geometrickou tabuľkou.

Všetci žiaci poznajú číslice, pracujú s nimi na hodinách matematiky. Zrejme nebudú mať problémy pri ich tvorení na tabuľke. Predtým ako necháme žiakov tvoriť číslice a znaky, ktoré poznajú z matematiky, môžeme s nimi zopakovať niektoré vedomosti z matematiky.

Opýtame sa žiakov aké operácie v matematike poznajú. Ich odpoveď by mala obsahovať aspoň tieto: sčítanie, odčítanie, násobenie a delenie. Môžeme požiadať niektorého žiaka, aby nakreslil znaky týchto operácií na tabuľu. Po krátkom opakovaní dáme žiakom čas na modelovanie. Potom so žiakmi vedieme diskusiu. Spýtame sa žiakov, či vedeli vymodelovať napr. číslo 1. Prihlási sa určite viac žiakov, ktorí vymodelovali číslicu 1. Vyzveme jedného z nich, aby prekreslil svoju „jednotku“ na tabuľu. Takto môžeme pokračovať až kým nevyčerpáme čísla, ktoré sa žiakom podarilo vytvoriť. Potom sa opýtame žiakov, aké znaky z matematiky vedeli vytvoriť na tabuľke. Môžeme im pri rozmýšľaní o znakoch v matematike pomôcť tým, že im dáme riešiť príklad. Napr. porovnajte čísla 15 a 24. Aký znak použijete? Žiaci by mali prísť na znak pre porovnávanie čísel, znak vyjadrujúci vzťah „menší ako, väčší ako“.

3 MODELUJEME GEOMETRICKÉ ÚTVARY

Modelovaním geometrických útvarov vstupujeme už do matematiky a začíname využívať geometrickú tabuľku ako pomôcku na vyučovacích hodinách matematiky.

Nasledovné úlohy môžeme zadávať žiakom, od piateho ročníka základnej školy, pretože už poznajú základné geometrické útvary: trojuholníky, štvoruholníky a podobne. A poznajú tiež ich charakteristické znaky a vlastnosti. V tejto kapitole uvádzame iba tri úlohy, ale učiteľ môže tieto úlohy rozšíriť a obohatiť ich svojimi nápadmi. Aj pri týchto úlohách majú žiaci ako pomôcku bodkovaný papier, na ktorý zaznamenávajú vytvorené, geometrické útvary.

3.1 TROJUHOLNÍKY NA GEOMETRICKEJ TABUĽKE

Modelujte na geometrickej tabuľke typu 3x3 trojuholníky. Nájdite všetky rôzne tvary trojuholníkov, ktoré je možné na tejto tabuľke vytvoriť.

METODICKÉ POZNÁMKY

Zadali sme žiakom úlohu modelovať trojuholníky na tabuľke 3x3. Objasníme im presnejšie úlohu tak, že im povieme, aby hľadali navzájom rôzne tvary trojuholníkov a aby zistili koľko takýchto trojuholníkov vedia na tabuľke 3x3 vymodelovať. Upozorníme žiakov, že niektoré trojuholníky môžu byť rôzne otočené a môžu mať rôzne umiestnenia na tabuľke, ale v skutočnosti ide o tie isté tvary trojuholníkov.

Napríklad trojuholníky na nasledujúcom obrázku sú trojuholníky toho istého tvaru. Sú to zhodné trojuholníky.

Obr. č. 4

Je dôležité, aby si žiaci dávali pozor a nezapočítali ten istý trojuholník dvakrát. Ak pochopia túto skutočnosť, necháme ich riešiť zadanú úlohu.

Na tabuľke 3x3 je možné nájsť 8 navzájom rôznych nezhodných trojuholníkov. Preto keď žiaci dospejú k takémuto výsledku a nenachádzajú už ďalšie riešenia môžeme ich činnosť ukončiť a začneme s nimi diskutovať.

Pri riešení tejto úlohy odporúčame učiteľovi, aby si pripravil ako pomôcku nakreslené tvary trojuholníkov v sieti 3x3. Môžeme ich označiť číslami od 1 po 8. Takto pripravené trojuholníky môžu pomôcť pri diskusii so žiakmi.

Diskusia so žiakmi môže prebiehať napríklad takto: Vyvoláme jedného žiaka a požiadame ho, aby ukázal ostatným žiakom trojuholník, ktorý vymodeloval na tabuľke. Potom ho vyzveme, aby tento trojuholník prekreslil na tabuľu. Takto pokračujeme až kým nebudú na tabuli všetky trojuholníky. Dbáme pritom na to, aby na tabuli nebol ten istý trojuholník dvakrát. Keď už máme všetky riešenia na tabuli môžeme použiť svoju pomôcku (očíslované trojuholníky) a vystavíme ich na také miesto, aby na ne videli všetci žiaci. Potom môžeme so žiakmi uvažovať o týchto trojuholníkoch.

Kladieme im otázky:

Ktoré trojuholníky sú rovnoramenné?

Ktoré trojuholníky sú pravouhlé?

Ktoré trojuholníky sú tupouhlé?

Je niektorý z trojuholníkov rovnostranný?

Vedeli by ste vymodelovať na tabuľke rovnostranný trojuholník? Svoju odpoveď odôvodnite.

Žiaci môžu odpovedať tak, že na označenie pri odpovedi použijú čísla trojuholníkov, o ktorých si myslia, že sú rovnoramenné, pravouhlé, tupouhlé a pod.

3.2 ŠTVORUHOLNÍKY

Modelujte na geometrickej tabuľke typu 3x3 štvoruholníky. Koľko rôznych štvoruholníkov viete vymodelovať?

METODICKÉ POZNÁMKY

Zadaná úloha je podobná predchádzajúcej, ale v tejto žiaci hľadajú štvoruholníky. Predtým ako ich necháme pracovať, môžeme sa ich opýtať, či si myslia, že štvoruholníkov nájdu viac ako trojuholníkov. Táto otázka môže byť pre žiakov vhodnou motiváciou. Väčšina žiakov zrejme bude tvrdiť, že štvoruholníkov bude viac ako trojuholníkov. Vyzveme ich teda, aby svoje tvrdenie dokázali tak, že ich necháme riešiť úlohu. Učiteľ si aj k tejto úlohe môže pripraviť riešenia, ktoré potom môže vystaviť v triede. Ak žiaci majú pri hľadaní riešení problémy, snažíme sa im pomáhať. Po vyriešení úlohy, teda po nájdení všetkých riešení, začneme so žiakmi diskusiu. V diskusii si najskôr nájdeme všetky riešenia úlohy. Po nájdení všetkých riešení môžeme tieto vystaviť tak, aby ich videli všetci žiaci a mohli podľa nich odpovedať na naše otázky. Budeme so žiakmi rozoberať štvoruholníky. Kladieme im otázky:

Ktoré zo štvoruholníkov sú rovnobežníky?

Ktoré z nich sú obdĺžniky?

Ktoré zo štvoruholníkov sú štvorce?

Sú niektoré štvoruholníky nekonvexné?

Takto vedieme so žiakmi rozhovor o štvoruholníkoch, čím si žiaci opakujú svoje vedomosti o štvoruholníkoch a získavajú nadhľad nad problematikou úlohy.

3.3 MODELUJEME MNOHOUHOLNÍKY

Modelujte na tabuľke mnohouholníky. Určte počet vrcholov a strán každého mnohouholníka, prípadne iné charakteristické vlastnosti, ktoré ste si všimli.

METODICKÉ POZNÁMKY

V tejto úlohe pracujú žiaci s geometrickou tabuľkou 3x3. Každý žiak má ako pomôcku papier so štvorcovou sieťou, na ktorý zaznamenáva vytvorené riešenia.

Túto úlohu môžeme žiakom rozdeliť na niekoľko zaujímavých úloh, ktorých zadania môžu znieť takto:

Modelujte mnohouholníky, ktoré

A/ majú jeden kolík vo vnútri,

B/ majú vo vnútri dva kolíky,

C/ majú vo vnútri tri kolíky,

D/ majú jeden vnútorný uhol pravý,

E/ majú jeden vnútorný uhol tupý.

Špecifickejšími úlohami môžu byť napr. tieto:

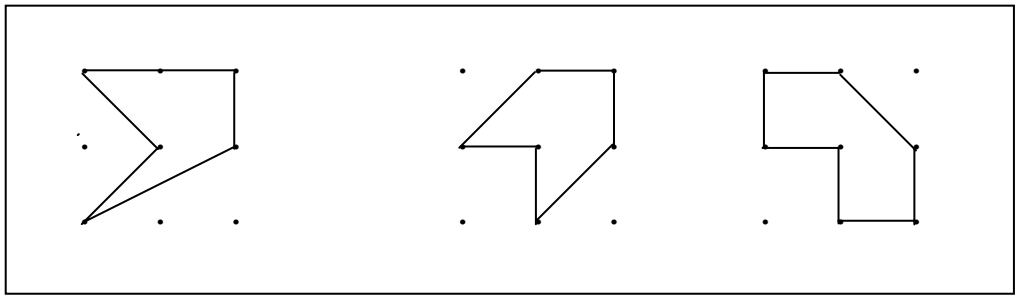
A/ vytvorte päťuholník, ktorý má dve strany rovnobežné,

B/ vytvorte šesťuholník s jedným pravým uhlom,

C/ nájdite na tabuľke mnohouholník s najväčším počtom strán.

Pri tejto úlohe je dôležité žiakom vysvetliť čo to znamená „vo vnútri“ mnohouholníka. Pochopenie tejto skutočnosti je predpokladom správneho riešenia zadaných úloh. Po objasnení môžeme žiakom postupne zadávať pripravené úlohy. Začneme prvou úlohou a povieme žiakom, aby modelovali mnohouholníky, ktoré obsahujú vo vnútri jeden kolík. Necháme žiakov riešiť túto úlohu. Postupne im zadávame ďalšie a po ich vyriešení diskutujeme o úlohe.

Všímame si žiakov pri riešení úloh, prípadné problémy a ťažkosti riešime individuálne alebo v diskusii so žiakmi. Táto úloha poskytuje žiakom veľa rôznych riešení a zrejme sa nedajú všetky v diskusii prezentovať, preto uvedieme len zopár ukážok riešení. Riešením môžu byť n-uholníky na nasledujúcom obrázku.



Obr. č. 5

4 MODELUJEME ÚTVARY SO ZAUJÍMAVÝMI VLASTNOSŤAMI

Nasleduje problém, ktorý je špecifickejší a dotýka sa viacerých stránok matematiky. Môžeme sa v ňom stretnúť s rôznymi oblasťami z učiva geometrie. Zamerali sme sa na hľadanie útvarov s rôznymi spoločnými znakmi a vlastnosťami.

Uvedieme úlohy o súmernosti, podobnosti a iné. Predpokladáme, že žiaci majú vedomosti, ktoré potrebujú na pochopenie zadaní úloh a ich správne riešenie. V tejto oblasti možno vytvoriť rôzne úlohy. Vo vytvorených úlohách odporúčame pracovať len s bodkovaným papierom, ktorý poskytuje viac priestoru na riešenia úloh. Časovým limitom na vypracovanie úloh môže byť zaplnenie bodkovaného papiera. Keď žiaci zaplnia papier začneme diskusiu.

4.1 SÚMERNÉ ÚTVARY

Vytvorte na geometrickej tabuľke alebo na bodkovanom papieri útvary, ktoré majú aspoň jednu os súmernosti.

METODICKÉ POZNÁMKY

Pred zadaním tejto úlohy odporúčame zopakovať so žiakmi pojmy súmernosť podľa osi, osovo súmerné útvary, os súmernosti. Ak niektorí žiaci nechápu pojem súmernosť podľa osi, povieme tým žiakom, ktorí ju chápu, aby to vysvetlili svojim spolužiakom. Zdôrazníme žiakom, že ktorýkoľvek obrazec alebo geometrický útvar, ktorý môže byť rozdelený priamkou na dve identické polovice je súmerný. Priamka, ktorá ho rozdeľuje na tieto dve rovnaké časti sa nazýva os súmernosti. Po pochopení týchto pojmov môžeme formulovať úlohu: Vytvorte na tabuľke 3x3, prípadne na tabuľke väčších rozmerov útvary, ktoré majú aspoň jednu os súmernosti. Útvary kreslite na bodkovaný papier. Okrem tabuľky, bodkovaného papiera, pera či ceruzky môžu žiaci používať ako pomôcku zrkadlo. To poslúži na kontrolu, či naozaj vytvorili útvar požadovaných vlastností. Ako po každej úlohe, aj v tomto prípade vedieme so žiakmi

diskusiu. Vyzveme niektorých žiakov, aby predstúpili pred tabuľu a ukázali útvary, ktoré našli. Ostatní žiaci nech hľadajú osi súmernosti týchto útvarov. Môžeme klásť otázky:

Má niektorý z útvarov viac ako jednu os súmernosti?

Aké polohy majú osi súmernosti? Sú zvislé, vodorovné alebo diagonálne?

Požiadame každého žiaka, aby vytvoril jeden súmerný útvar a určil počet osí súmerností. Všetky útvary, ktoré žiaci našli, roztriedime podľa počtu osí súmerností.

4.2 PODOBNÉ ÚTVARY

Rysujte na bodkovaný papier útvary navzájom podobné.

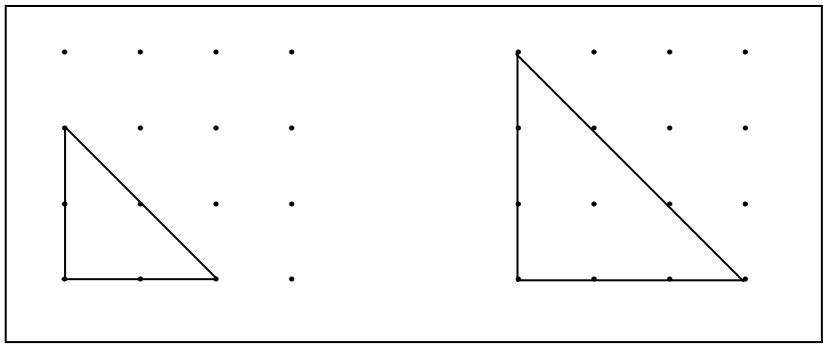
METODICKÉ POZNÁMKY

Pomôcky žiakov pri tejto úlohe sú bodkovaný papier, farebné perá alebo ceruzky, pravítko. Ceruzky budú slúžiť na rozlíšenie podobných útvarov, pravítko budú žiaci používať, aby vznikali rovné čiary. Preto je aj zadanie úlohy: rysujte.

Túto úlohu by sme mohli použiť aj na upevnenie a opakovanie učiva o podobnosti trojuholníkov. Zadáme žiakom úlohu: hľadajte navzájom podobné trojuholníky. Určte podľa akého kritéria sú podobné.

V diskusii môžeme so žiakmi zopakovať kritériá podobnosti trojuholníkov.

Na základe vedomostí o podobnosti trojuholníkov žiaci narysujú množstvo dvojíc navzájom podobných trojuholníkov. Diskusia je vhodná na zopakovanie kritérií podobnosti trojuholníkov a upevnenie vedomostí z tohto tématického celku. Riešením úlohy sú napríklad nasledujúce dva trojuholníky.



Obr. č. 6

4.3 OSOVO A STREDOVO SÚMERNÉ ÚTVARY

A/ Rysujte na bodkovaný papier mnohouholníky súmerné podľa osi súmernosti.
B/ Hľadajte medzi nimi stredovo súmerné mnohouholníky.

METODICKÉ POZNÁMKY

Žiaci majú zadanú úlohu modelovať osovo súmerné útvary a potom hľadať, ktoré z nich sú stredovo súmerné. Táto úloha si vyžaduje, aby žiaci poznali osovú, stredovú súmernosť a vedeli aké sú to osovo a stredovo súmerné útvary. Ak majú žiaci tieto vedomosti môžeme im zadať túto úlohu. Presne formulovaná môže byť takto:

Tvorte na bodkovaných papieroch osovo súmerné mnohouholníky a pokúste sa nájsť medzi nimi útvary súmerné podľa stredu. Žiaci budú pracovať samostatne s vlastným papierom a farebnými ceruzkami. Po skončení samostatnej práce žiakov môžeme zvoliť takýto postup diskusie:

Vyzveme jedného žiaka, aby ukázal ostatným svoje riešenie úlohy. Ostatní žiaci budú hľadať osi súmernosti v jeho riešeniach. Takto sa môžu vystriedať viacerí žiaci, ktorí majú navzájom rôzne riešenia. Toto je tiež vhodný čas na zopakovanie vedomostí o zhodných zobrazeniach, pretože osová a stredová súmernosť patria medzi takéto zobrazenia. Pojmy, ktoré sú s nimi spojené nám umožňujú klásť žiakom otázky:

Čím je daná osová súmernosť?

Čím je daná stredová súmernosť?

Aký je to samodružný bod?

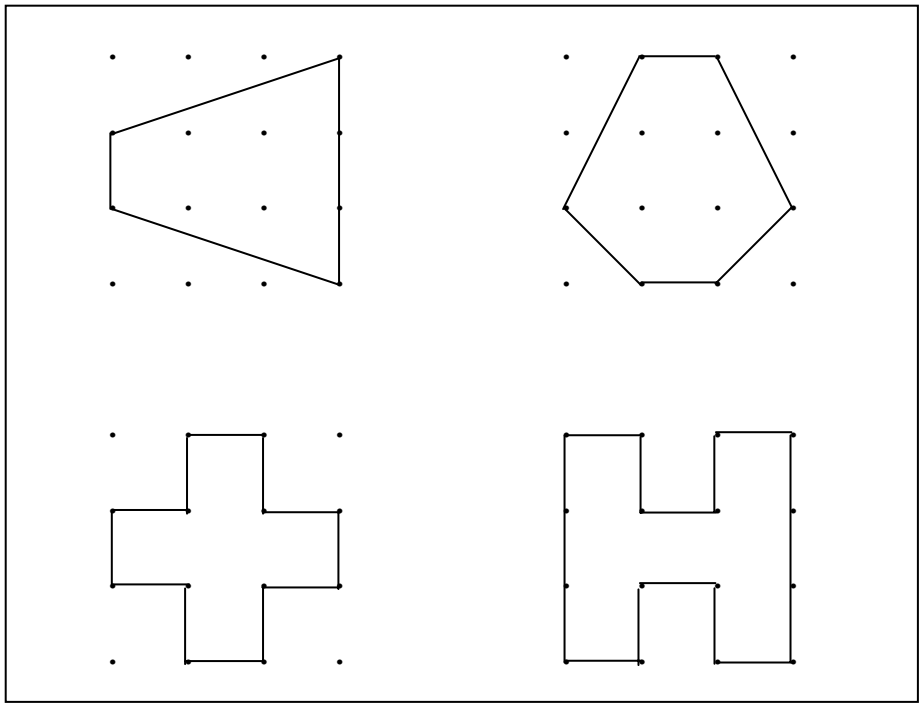
Čím sú charakteristické zhodné zobrazenia?

Majú niektoré útvary viac osí súmerností?

Ako nájdete pomocou osových súmerností útvar stredovo súmerný?

Pri hľadaní stredovo súmerných útvarov by mali žiaci využiť poznatok, že stredová súmernosť vzniká zložením dvoch osových súmerností, ktorých osi sú na seba kolmé. Stred súmernosti je priesečník osí súmerností. Toto je tiež vhodná príležitosť zopakovať skladanie osových súmerností.

Pri tejto úlohe žiaci uplatňujú svoje zručnosti a schopnosti nájsť vhodný útvar, ktorý má os súmernosti. Využívajú svoje vedomosti o zhodných zobrazeniach. Niektoré zaujímavé riešenia úlohy môžu žiaci vystaviť na nástenku, aby si ich mohli pozrieť ostatní. Prvé dva z nasledujúcich útvarov sú súmerné podľa jednej osi, ďalšie dva podľa dvoch na seba kolmých osí, teda sú aj stredovo súmerné.

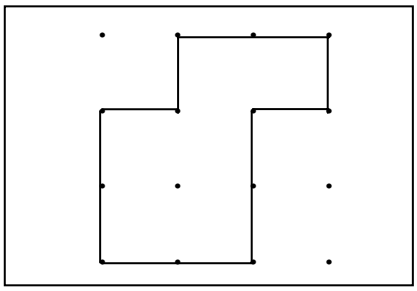


Obr. č. 7

5 MODELUJEME A POČÍTAME

V úlohách tejto kapitoly žiaci najskôr modelujú útvary a potom počítajú ich obsahy a obvody. My sme sa zamerali na počítanie obsahov. Žiaci pracujú s bodkovaným papierom, na ktorom zvolíme vhodnú mierku. V každej z úloh sme zvolili rovnakú mierku. Určili sme, že vzdialenosť dvoch bodov je jedna jednotka. Obsah jedného štvorčeka siete je potom tiež jedna jednotka. Obsahy vymodelovaných útvarov sú potom násobky, resp. diely jednotky.

Napríklad tento útvar má obsah 6 jednotiek.



Obr. č. 8

Pri komunikácii so žiakmi budeme jednoducho hovoriť, že daný útvar má obsah 6. V nasledujúcich úlohách má každý žiak bodkovaný papier, pero alebo ceruzku. Žiaci kreslia útvary na papier a počítajú ich obsahy.

5.1 OBSAHY ŠTVORCOV A OBDĹŽNIKOV

A/ Kreslite na bodkovaný papier štvorce rôznych veľkostí. Počítajte obsahy týchto štvorcov.

B/ Kreslite na bodkovanom papieri obdĺžniky rôznych veľkostí. Počítajte obsahy týchto obdĺžnikov.

METODICKÉ POZNÁMKY

Úloha je rozdelená na dve časti. V prvej časti modelujú žiaci štvorce rôznych veľkostí a zisťujú ich obsahy. V druhej časti sa zaoberáme obdĺžnikmi. Zadáme žiakom prvú úlohu a necháme dostatok času na riešenie. Keď zaplnia celý papier, na ktorom riešia úlohu, začneme diskusiu. Vyvoláme niektorého žiaka k tabuli, aby prekreslil nejaký štvorec a určil jeho obsah. Žiak objasní postup akým zistil obsah štvorca.

Takto sa môžu pri tabuli vystriedať viacerí žiaci, pričom každý z nich nakreslí na tabuľu vždy štvorec inej veľkosti, aby sa hodnoty obsahov neopakovali. Diskusiu môžeme uzavrieť tým, že zopakujeme so žiakmi základné charakteristiky štvorca. Úplne analogicky môžeme postupovať v druhej časti úlohy.

Žiaci rýchlo prídu na to, že štvorec, resp. obdĺžnik sa dá rozdeliť na menšie štvorčeky, ktorých obsahy sú známe. Súčet obsahov týchto malých štvorčekov je hľadaný obsah štvorca, resp. obdĺžnika.

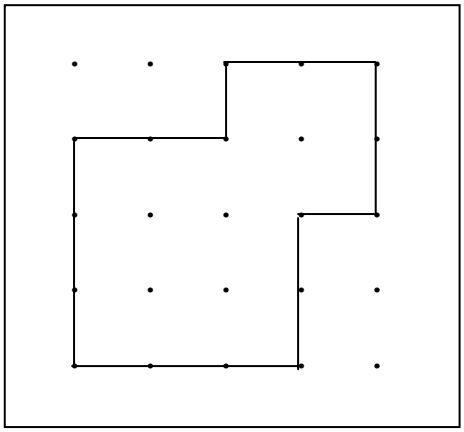
5.2 OBSAHY ÚTVAROV ZLOŽENÝCH ZO ŠTVORCOV A OBDĹŽNIKOV

Kreslite na bodkovaný papier nepravidelné útvary zložené zo štvorcov a obdĺžnikov. Zistite ich obsahy. Určte počet strán každého útvaru.

METODICKÉ POZNÁMKY

V tejto úlohe žiaci tvoria útvary, ktoré sú ohraničené len vodorovnými a zvislými čiarami. Takéto útvary sú zložené zo štvorcov a obdĺžnikov, obsahy ktorých sú známe. Po sčítaní týchto čiastkových obsahov dostaneme hľadaný obsah útvaru. Keď žiaci pochopia túto skutočnosť, zadáme im úlohu a necháme ich riešiť.

Diskusiu so žiakmi vedieme tak, že ich vyvolávame postupne po jednom k tabuli. Žiak nakreslí na tabuľu útvar a určí jeho obsah tak, že povie celý postup. Niektorý útvar môže mať napr. taký tvar ako na nasledujúcom obrázku.



Obr. č. 9

Tento útvar rozdelíme na štvorce a obdĺžniky a zistíme, že má obsah 12.

5.3 TROJUHOLNÍKY A ICH OBSAHY

A/ Zistite obsahy trojuholníkov vymodelovaných na tabuľke 3x3 (tretia kapitola, úloha 3.1).

B/ Na bodkovaný papier kreslite trojuholníky rôznych tvarov a počítajte ich obsahy.

METODICKÉ POZNÁMKY

Úlohu sme rozdelili na dve časti. V prvej časti využívame riešenie úlohy 3.1 tretej kapitoly. Sú to vymodelované trojuholníky na tabuľke 3x3. Žiaci majú počítať obsahy týchto trojuholníkov. Predtým, ako začnú, poradíme im, že každý trojuholník možno doplniť na rovnobežník. Tento poznatok by im mal pomôcť a uľahčiť počítanie obsahov trojuholníkov. Túto časť úlohy môžeme riešiť so žiakmi spoločne. Použijeme k tomu pomôcku, ktorú sme si zhotovili v úlohe 3.1, očíslované modely trojuholníkov. Tieto modely vystavíme na nástenku alebo magnetickú tabuľu tak, aby ich videli všetci žiaci. Vypočítame obsah trojuholníka označeného číslom 1. Popíšeme žiakom celý postup ako sme sa dopracovali k výsledku. Určíme jedného žiaka, aby vypočítal obsah ďalšieho trojuholníka. Takto zistíme obsahy všetkých ôsmich trojuholníkov. Výsledky tejto časti úlohy zjednodušia žiakom počítanie v druhej časti úlohy. Tú už môžu žiaci

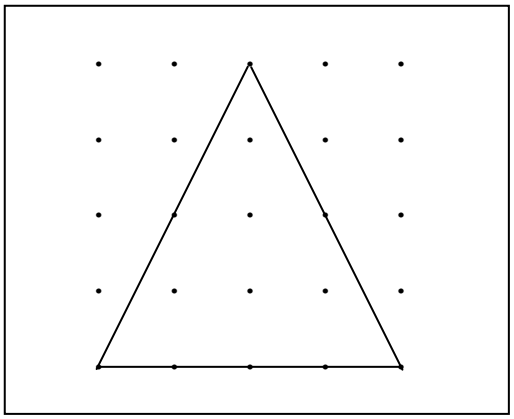
riešiť samostatne. Formulujeme ju takto: Vytvorte na bodkovanom papieri trojuholníky rôznych tvarov a veľkostí. Zistite obsahy týchto trojuholníkov.

Keď žiaci zaplnia celý papier, pristúpime k diskusii. Určíme troch žiakov, aby prišli k tabuli a prekreslili trojuholníky. Žiaci napíšu obsah trojuholníka. Postupne každý z nich povie postup riešenia. Takto sa môžu vystriedať tri trojice žiakov, pričom dbáme, aby na tabuľu kreslili vždy trojuholníky rôznych tvarov a veľkostí.

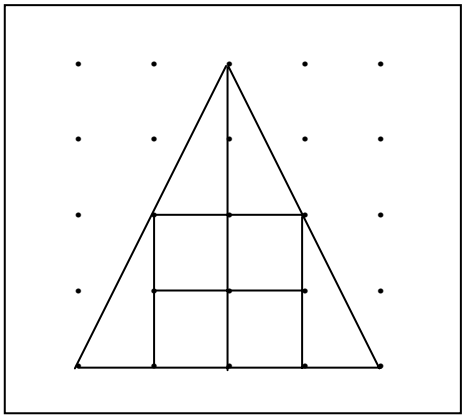
Časť B úlohy je možné riešiť dvoma spôsobmi. Popíšeme postupy oboch spôsobov.

Prvý spôsob: Rozdeľovanie trojuholníka na menšie útvary známych obsahov.

Trojuholník rozdelíme na štvorce a trojuholníky známych obsahov. Ukážka trojuholníka, ktorého obsah ideme zisťovať je na obrázku č. 10.



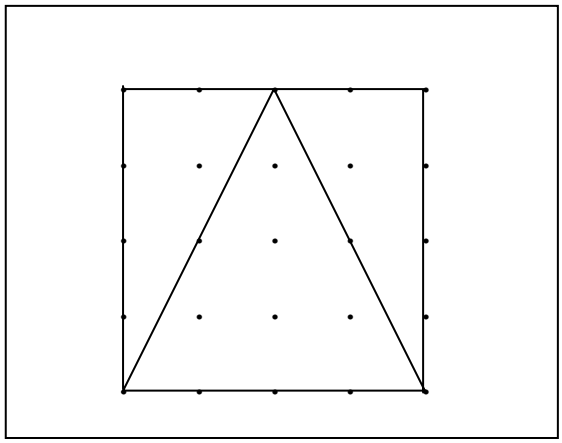
Obr. č. 10



Obr. č. 11

Z obrázku č. 11 vidieť, že trojuholník sa skladá zo štyroch štvorčekov a štyroch zhodných trojuholníkov, ktorých obsahy sme zistili v časti A úlohy. Každý trojuholník má rovnaký obsah ako jeden štvorček siete. Môžeme povedať, že trojuholník na obr. č.10 sa skladá z ôsmich štvorčekov, preto obsah trojuholníka je 8.

Druhý spôsob: Dopĺňanie trojuholníka na rovnobežník.

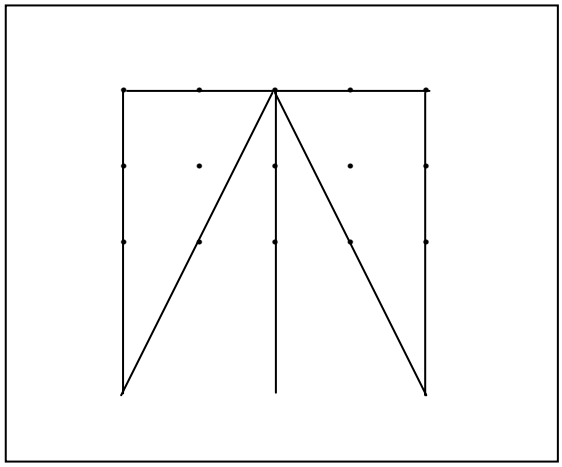


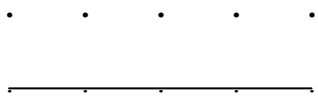
Obr. č. 12

Podľa obrázka č. 12 doplníme trojuholník na rovnobežník. Vzniknutý rovnobežník je štvorec s obsahom 16. Vidieť, že trojuholník zaberá polovicu plochy štvorca. Trojuholník má obsah 8. Niektorí žiaci z obr. č. 12 nepostrehnú, že trojuholník zaberá polovicu štvorca. Môžeme preto zvoliť iný postup. Podľa obrázka č. 13 rozdelíme trojuholník na dva zhodné trojuholníky. Keďže sú zhodné, ich obsahy budú rovnaké. Stačí zistiť obsah jedného. Trojuholník je doplnený na obdĺžnik zložený z ôsmich štvorčekov, má obsah 8. Obsah trojuholníka je 4, pretože zaberá polovicu plochy obdĺžnika. Výsledný obsah je dvojnásobne väčší, má hodnotu 8.

Oboma spôsobmi sa dopracujeme k správnemu výsledku.

Žiaci zručne dopĺňali trojuholníky na rovnobežníky a pomocou nich vedeli vypočítať obsah trojuholníkov veľmi rýchlo. Keď rezali alebo dopĺňali trojuholníky, využívali výsledky zistené v časti A úlohy.





Obr. č. 13

5.4 OBSAHY ÚTVAROV OHRANIČENÝCH DIAGONÁLNYMI ČIARAMI

Tvorte na bodkovanom papieri útvary, ktoré sú ohraničené vodorovnými, zvislými a diagonálnymi čiarami. Zistite obsahy vytvorených útvarov.

METODICKÉ POZNÁMKY

Každý útvar ohraničený vodorovnými, zvislými a diagonálnymi čiarami sa dá rozdeliť na menšie časti, ktorými sú štvorce, obdĺžniky, trojuholníky. Ich obsahy sme určovali v predchádzajúcich úlohách. V tejto úlohe budeme používať výsledky týchto úloh a podobné postupy.

Vyzveme žiakov, aby kreslili útvary ohraničené vodorovnými, zvislými aj diagonálnymi čiarami a počítali ich obsahy. Žiaci budú pracovať samostatne. Každý má vlastný bodkovaný papier, na ktorom rieši úlohu. Po skončení práce žiakov začneme s nimi diskutovať. Niektorý zo žiakov nakreslí na tabuľu útvar, ktorý spĺňa zadanie úlohy. Naznačí postup, ako počítal obsah tohto útvaru. Vyvoláme iného žiaka, aby zistil obsah toho istého útvaru iným spôsobom. Takto môžeme vyvolať viacerých žiakov, pričom vždy dvaja počítajú obsah toho istého útvaru. Žiaci by mali postrehnúť, že útvar je možné rozdeliť na menšie časti viacerými spôsobmi alebo doplniť na väčšie časti. Každý z nich však vedie k tomu istému výsledku.

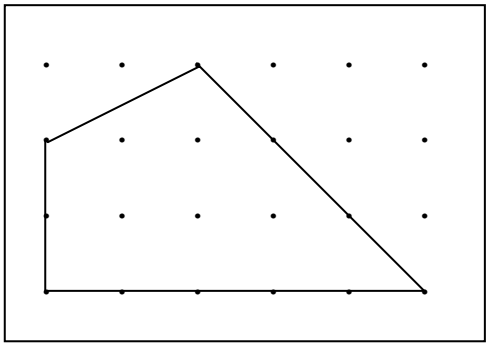
6 KOMPLEXNÉ ÚLOHY

V tejto kapitole uvedieme zadania a riešenia úloh, ktoré súvisia s bodkovanou sieťou. Niektoré z nasledujúcich úloh sme vytvorili sami, niektoré sú úlohami z matematických olympiád.

ÚLOHA 6.1

Úloha je z matematickej olympiády (49. ročník MO, školský rok 1999-2000, domáce kolo, príklad číslo Z7 - I - 6.)

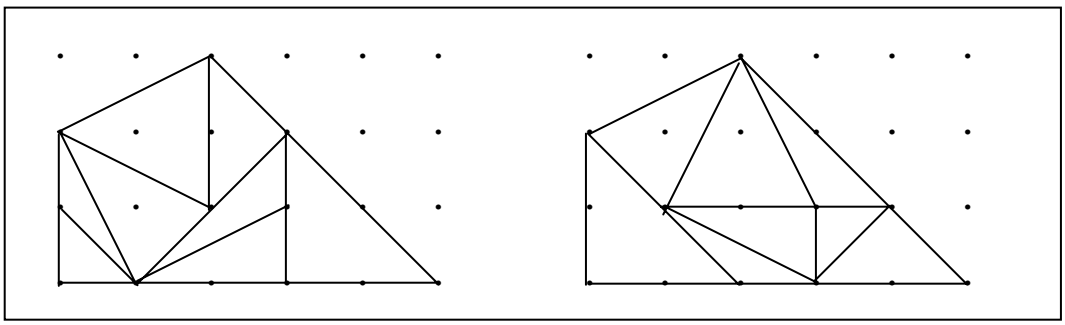
Je daných deväť bodov štvorcovej siete. Nájdi všetky rôzne nezhodné trojuholníky s vrcholmi v týchto bodoch. Potom týmito trojuholníkmi pokry celú plochu štvoruholníka na obrázku:



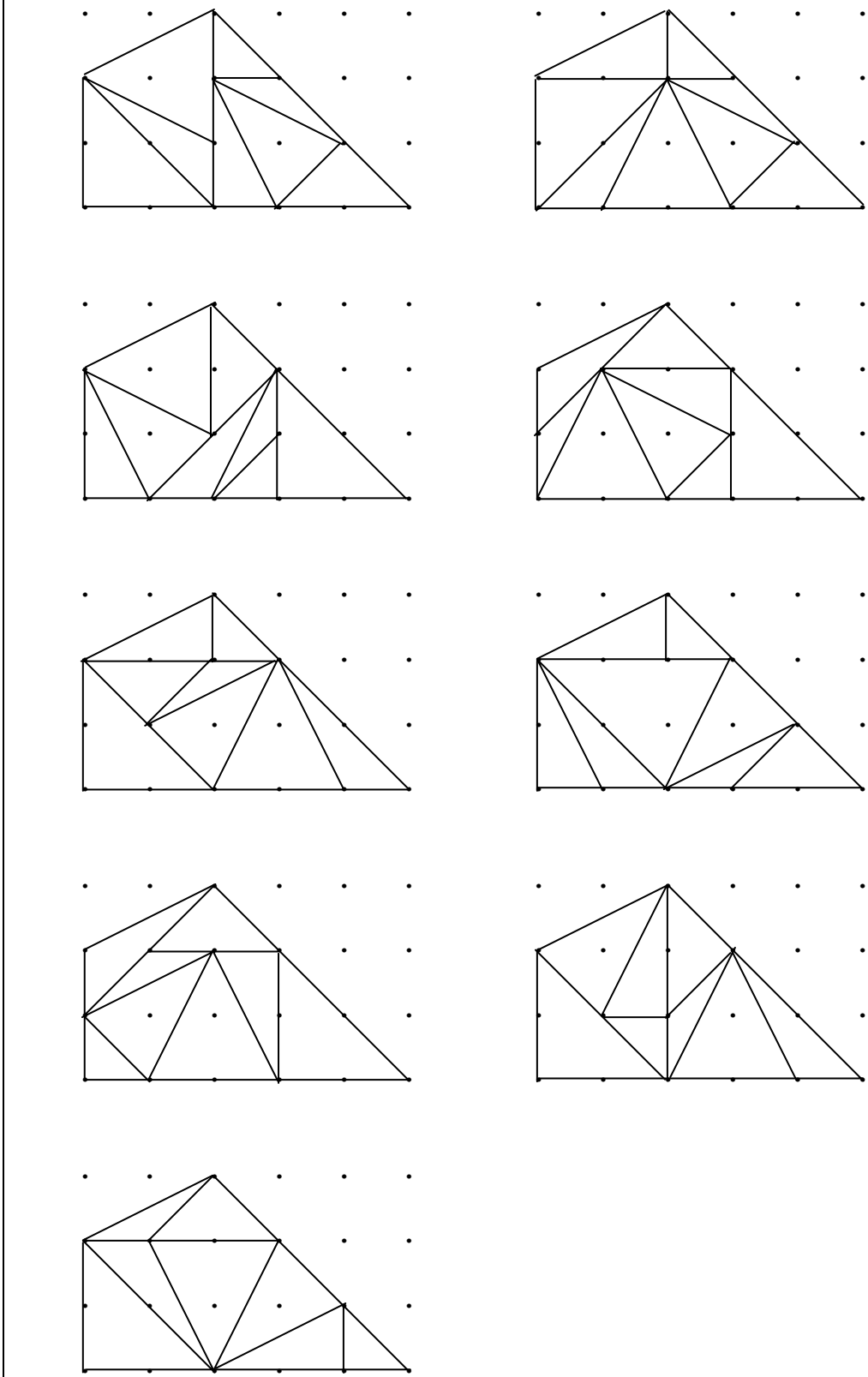
Obr. č. 14

Riešenie:

Nezhodných trojuholníkov v štvorcovej sieti 3x3 je 8. Túto časť riešenia vynechávame, nakoľko je uvedená v tretej kapitole. Nájdenými trojuholníkmi sme pokrývali plochu štvoruholníka. Úloha má niekoľko riešení. Našli sme jedenásť rôznych riešení, ktoré uvádzame na nasledujúcich obrázkoch.



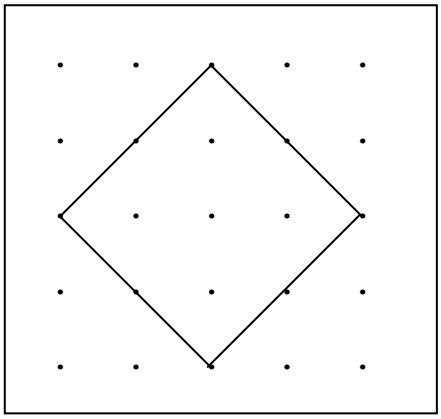
Obr. č. 15



Obr. č. 16

ÚLOHA 6.2

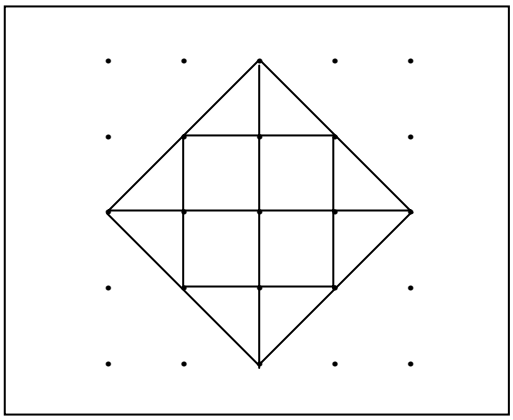
Zistite obsah štvorca na obrázku, ak viete, že jeden štvorček siete má obsah 16 mm^2.



Obr. č. 17

Riešenie:

Štvorec si rozdelíme na menšie časti, štvorčeky a trojuholníky:



Obr. č. 18

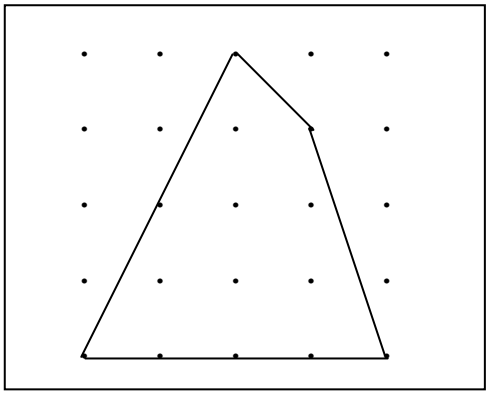
Z obrázku vidíme, že štvorec sa skladá zo štyroch štvorčekov a ôsmich trojuholníkov. Každý trojuholník sa dá doplniť na rovnobežník, v tomto prípade na štvorček so známym obsahom. Na obrázku je 8 takýchto trojuholníkov. Obsah každého je polovica obsahu štvorčeka. Spojením dvoch trojuholníkov vznikne štvorček. Môžeme teda prehlásiť, že štvorec je zložený z ôsmich štvorčekov s obsahom 16 mm^2. Počítame:

8 . 16 = 128

Hľadaný obsah štvorca je 128 mm^2.

ÚLOHA 6.3

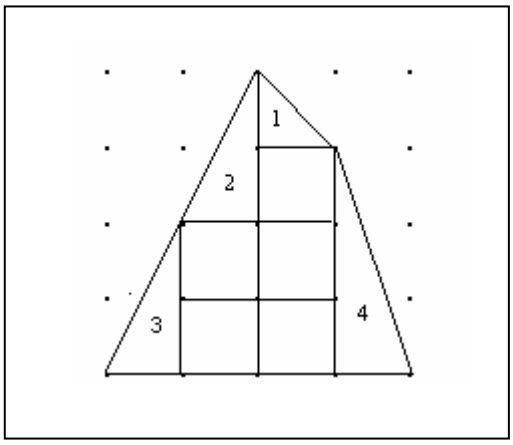
Na obrázku je nakreslený štvoruholník. Zistite jeho obsah, ak obsah jedného štvorčeka siete je 16 mm^2.



Obr. č. 19

Riešenie:

Štvoruholník si rozdelíme na menšie časti, obsahy ktorých vieme ľahko vypočítať.



Obr. č. 20

Vidieť, že štvoruholník sa skladá z piatich štvorčekov, obsahy ktorých poznáme, a zo štyroch rôznych trojuholníkov. Obsahy týchto trojuholníkov si musíme vypočítať. Uplatňujeme druhý spôsob opísaný v úlohe 5.3, dopĺňame trojuholníky na rovnobežníky. Začneme trojuholníkom označeným jednotkou. Tento trojuholník je polovicou štvorčeka, jeho obsah je 8 mm^2. Trojuholníky označené dvojkou a trojkou sú zhodné, majú rovnaký obsah. Môžeme ich doplniť na obdĺžnik zložený z dvoch štvorčekov. Obsah trojuholníkov 2 a 3 je rovnaký ako obsah štvorčeka, 16 mm^2.

Obsah štvrtého trojuholníka zistíme podobne, doplníme ho na rovnobežník. Jeho obsah je 24 mm^2.

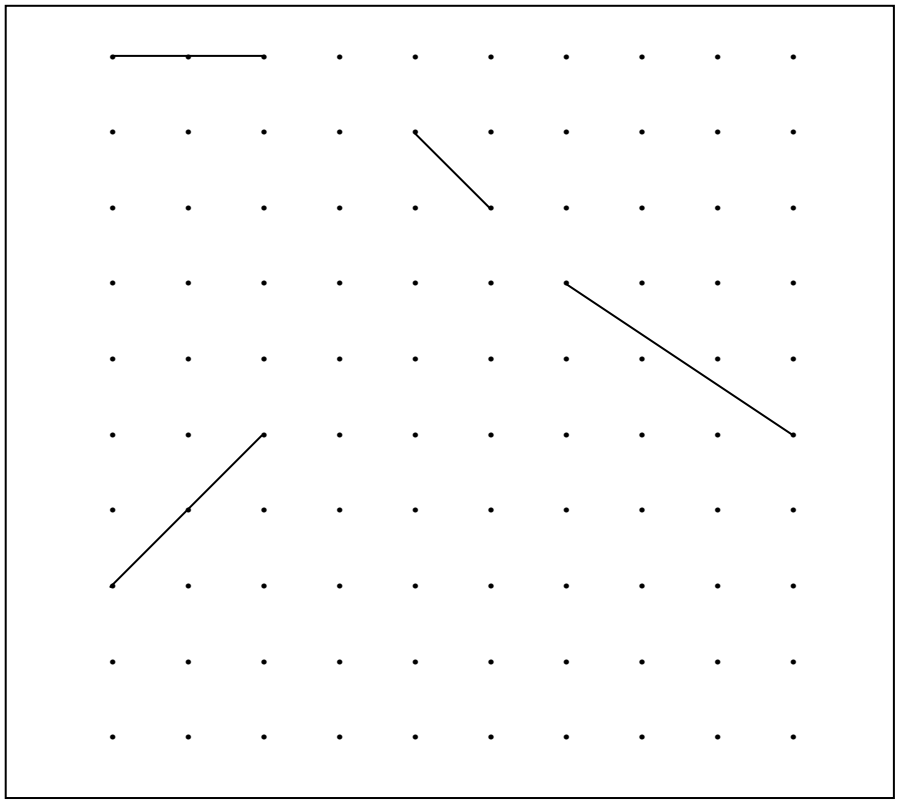
Spočítame obsahy: 5 . 16 + 8 + 16 + 16 + 24 = 144

Obsah štvoruholníka je 144 mm^2.

ÚLOHA 6.4

A/ Na obrázku sú úsečky rôznych veľkostí. Prekreslite úsečky samostatne do štvorcovej siete a k daným úsečkám dokreslite štvorce.

B/ Presvedčte sa o tom, že ak v štvorcovej sieti spojíte úsečkou dva ľubovolné body, viete vytvoriť štvorec, ktorého strana je daná úsečka.

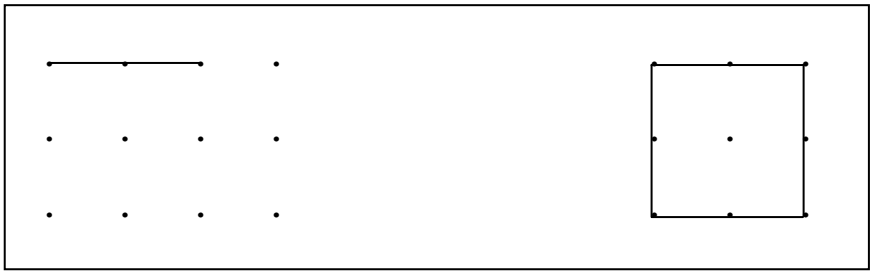


Obr. č. 21

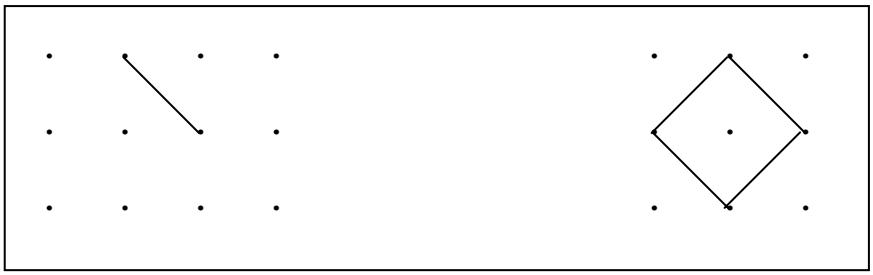
Riešenie:

Uvedieme riešenie časti A tejto úlohy.

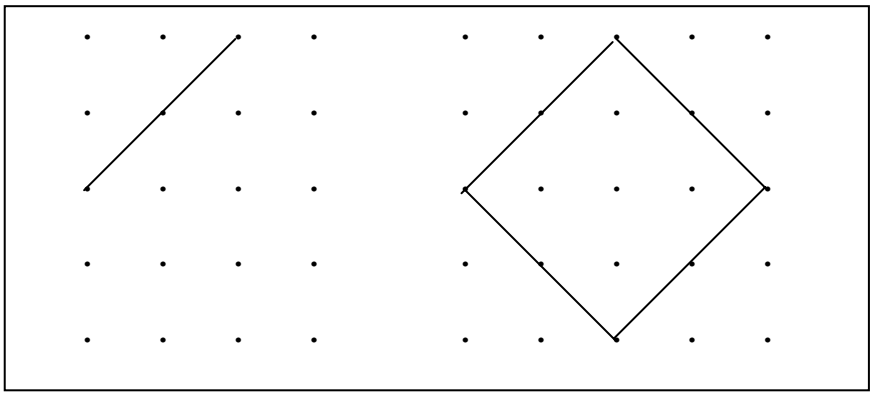
K daným úsečkám sme našli štvorce ako to ukazujú nasledujúce obrázky.



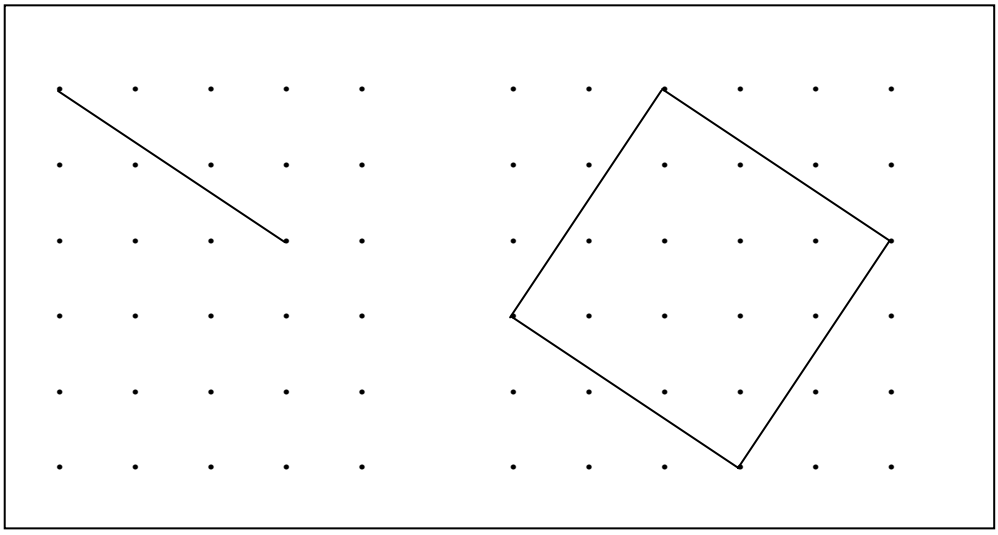
Obr.č. 22



Obr. č. 23



Obr. č. 24

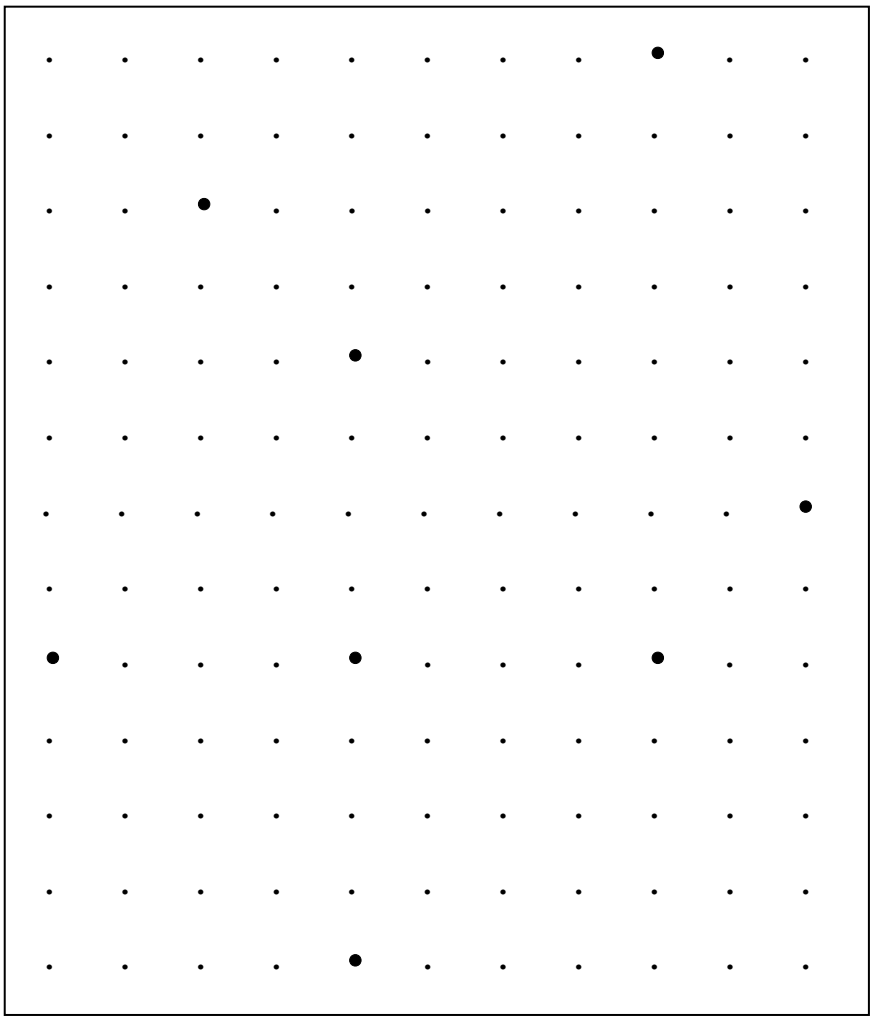


Obr. č. 25

ÚLOHA 6.5

Úloha z 51. ročníka MO, školský rok 2001-2002, domáce kolo, príklad Z 5 - I – 5.

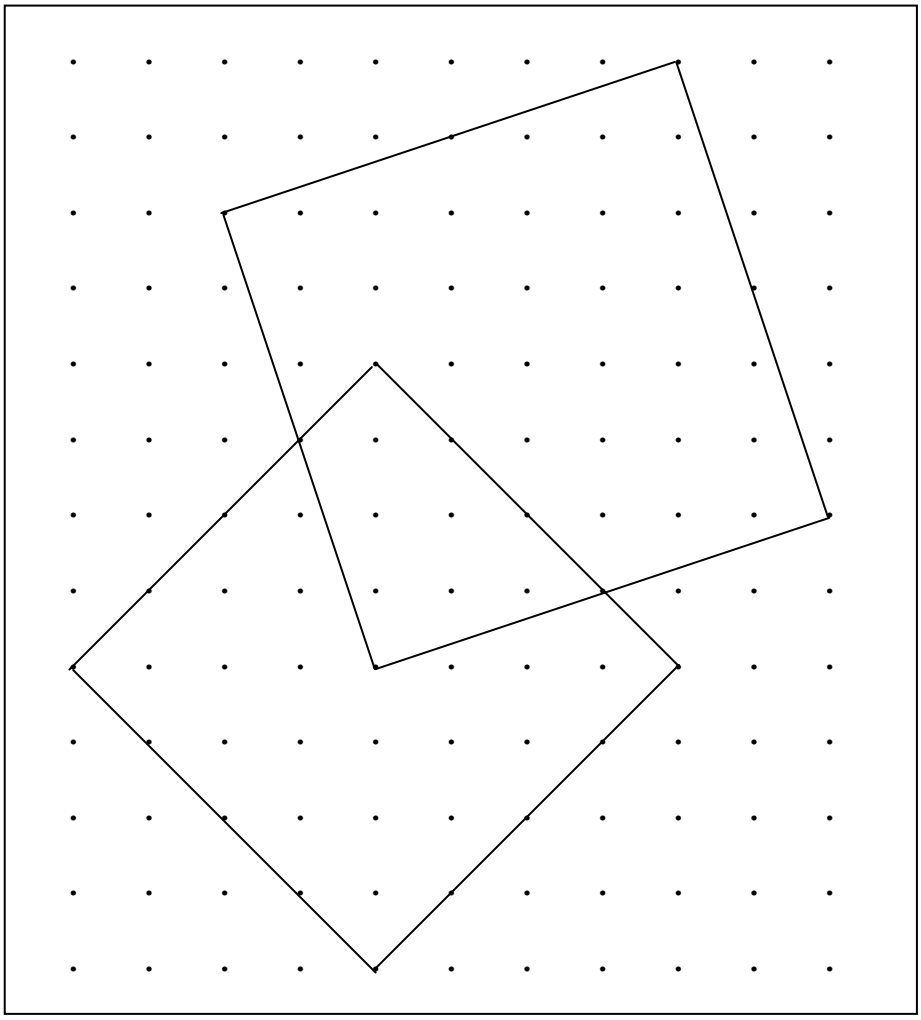
Na obrázku sú znázornené všetky vrcholy dvoch štvorcov. Zistite obsah ich spoločnej časti. (Jeden štvorček siete má obsah 25 mm^2.)



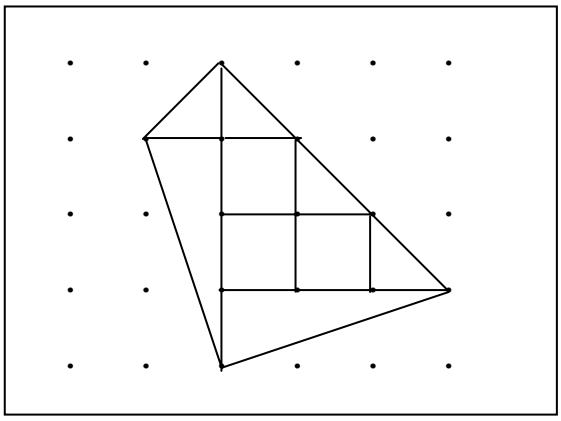
Obr. č. 26

Riešenie:

Aby sme mohli začať počítať obsah spoločnej časti štvorcov, musíme si ich do obrázku dokresliť. Spoločná časť štvorcov predstavuje štvoruholník. Ten sme si prekreslili samostatne do novej štvorcovej siete. Jeho obsah zisťujeme podobne ako v predchádzajúcich úlohách. Štvoruholník si rozdelíme na menšie časti, obsahy ktorých sú známe alebo ich vieme zistiť.



Obr. č. 27



Obr. č. 28

Útvar tvoria tri štvorčeky so známym obsahom, štyri zhodné menšie trojuholníky a dva zhodné väčšie trojuholníky. Menšie trojuholníky majú spolu obsah rovnajúci sa

obsahu dvoch štvorčekov, presne 2 . 25 mm^2. Dva veľké trojuholníky spolu tvoria obdĺžnik zložený z troch štvorčekov, preto ich obsah je 3 . 25 mm^2. Obsahy sčítame:

3 . 25 + 2 . 25 + 3 . 25 = 200

Spoločná časť štvorcov má obsah 200 mm^2.

ÚLOHA 6.6

Zostrojte v štvorcovej sieti pravouhlý rovnoramenný trojuholník. Nad jeho preponou zostrojte ďalší pravouhlý rovnoramenný trojuholník. Nad preponou tohto trojuholníka tiež zostrojte pravouhlý rovnoramenný trojuholník. Takto postupujte až kým nezaplníte celú štvorcovú sieť. Pozorujte a určte:

dĺžku prepony každého trojuholníka,

dĺžku odvesien každého trojuholníka,

obsah trojuholníka.

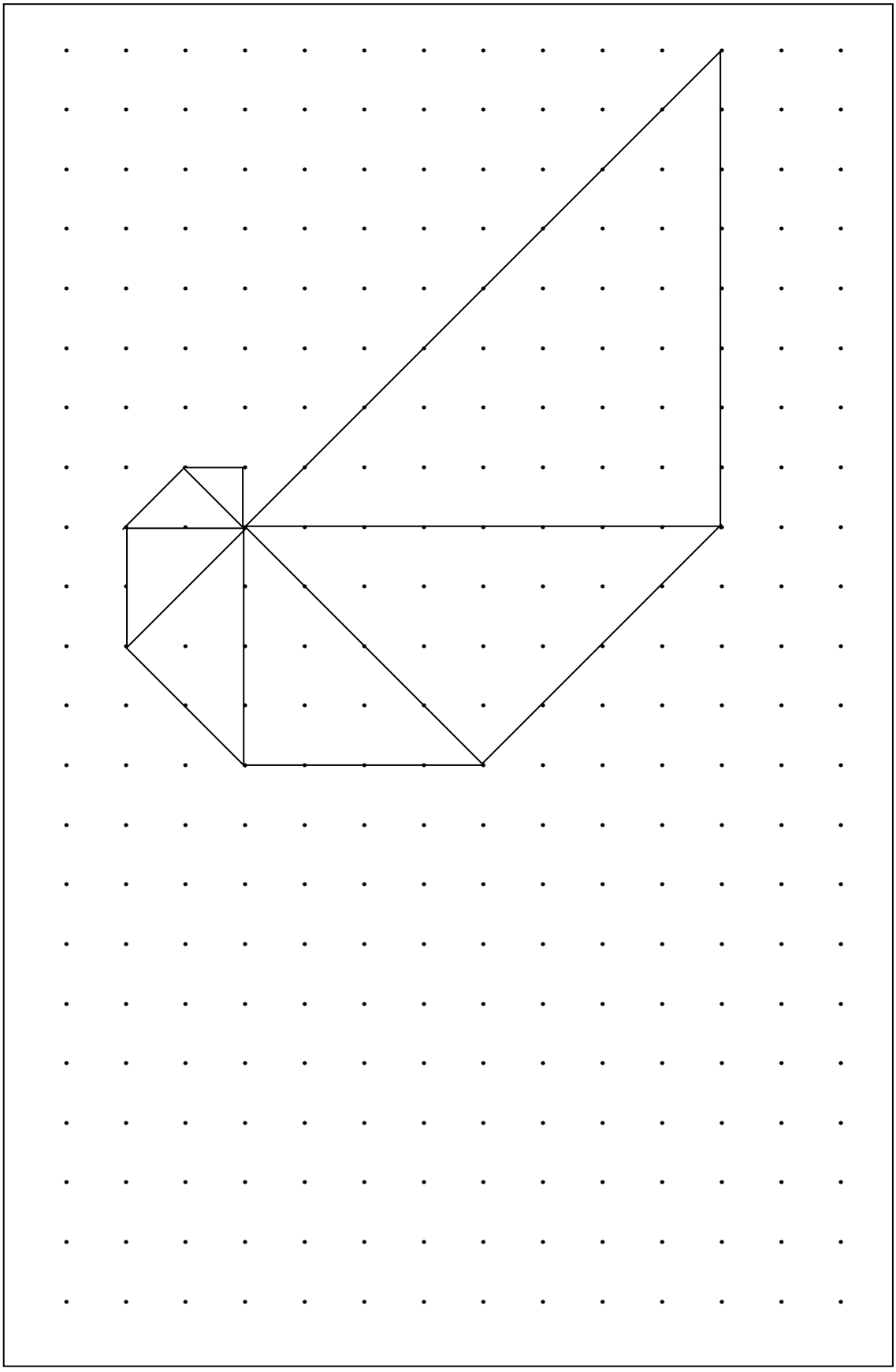
Zisťujte iné zaujímavosti a zapíšte ich.

Riešenie:

Pozorovaním sme dospeli k týmto záverom:

- všetky trojuholníky majú jeden spoločný vrchol,
- vrcholy pri pravom uhle každého trojuholníka postupujú v tvare špirály,
- dĺžka prepony predchádzajúceho trojuholníka je rovná dĺžke odvesny nasledujúceho trojuholníka

Konštrukcia úlohy je naznačená na nasledujúcej strane.



Obr. č. 29

ÚLOHA 6.7

Zostrojte v štvorcovej sieti útvar súmerný podľa

A/ zvislej osi,

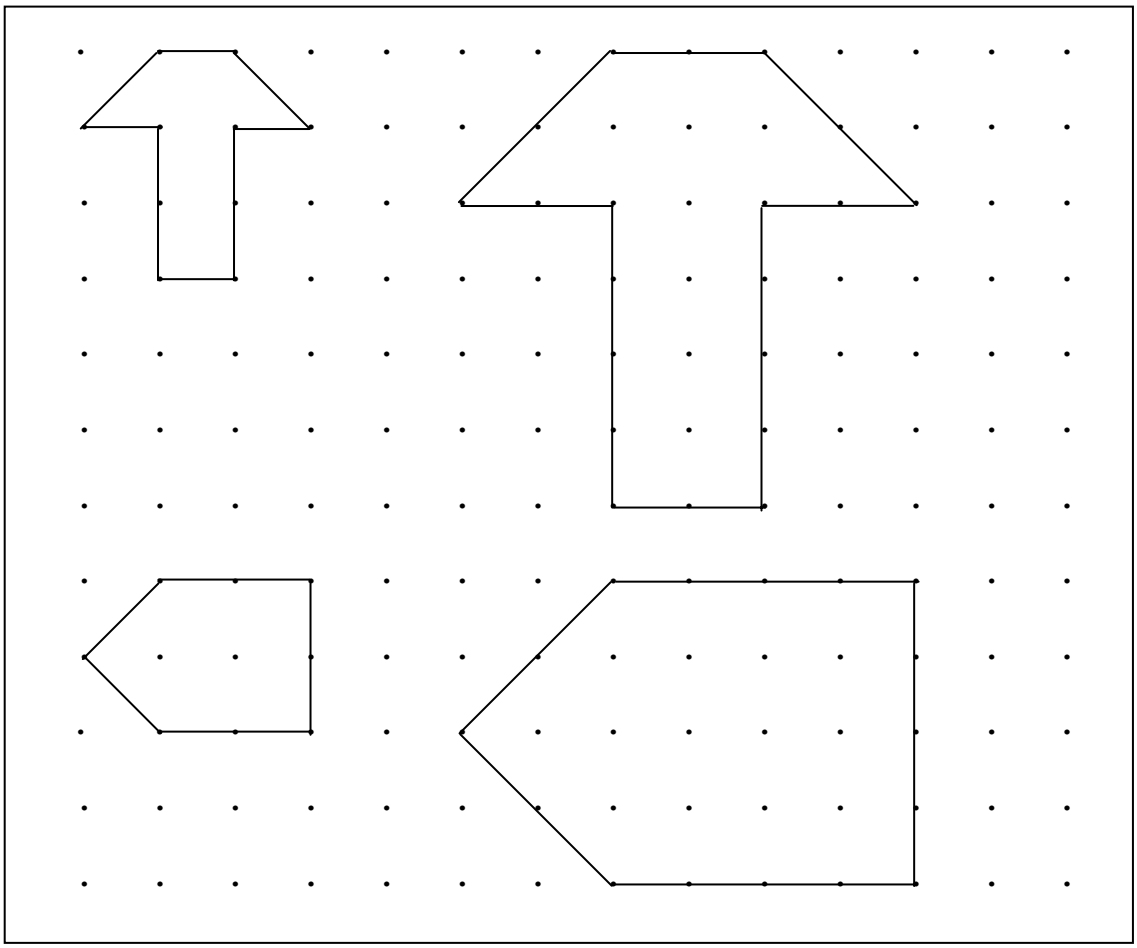
B/ vodorovnej osi,

C/ diagonály.

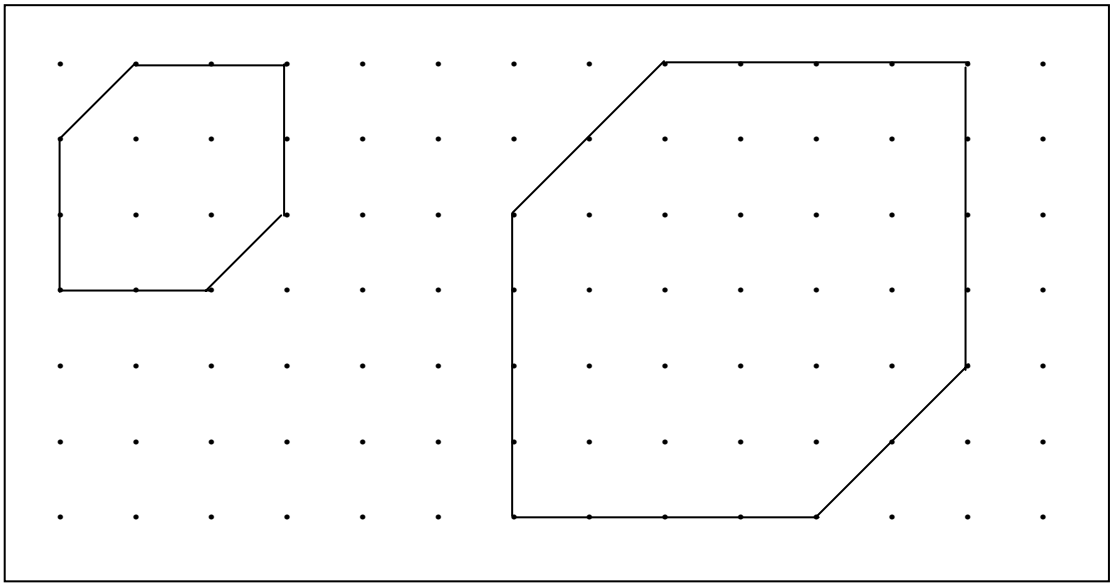
Nakreslite k daným útvarom podobné útvary, ktoré budú mať dvojnásobnú výšku a dvojnásobnú šírku, ako mal pôvodný útvar. Tvorte ďalšie dvojice takýchto útvarov.

Riešenie:

Úloha má veľa riešení, my uvedieme jedno riešenie, ku každej časti úlohy. Na obrázku č. 31 sú útvary súmerné podľa zvislej a vodorovnej osi, na obr. č. 32 útvar súmerný podľa diagonály.



Obr. č. 30



Obr. č. 31

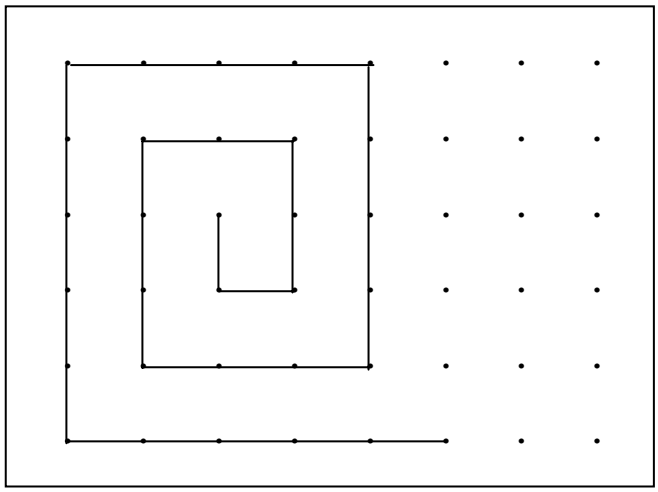
ÚLOHA 6.8

A/ Tvorte na bodkovanom papieri špirály. Každej špirále priraďte postupnosť dĺžok jednotlivých strán začínajúcu vnútrom.

B/ Je daná postupnosť, ktorá predstavuje dĺžky strán. Vytvorte k danej postupnosti špirálu.

Riešenie:

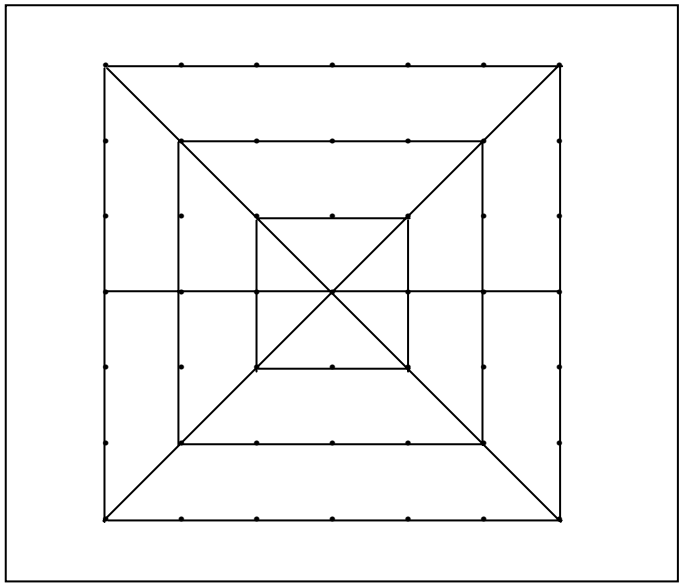
Uvádzame len jedno riešenie časti A. Naznačíme sme konštrukciu špirály, ktorej priradíme nasledovnú postupnosť: 1, 1, 2, 2, 3, 3, 4, 4, 5, 5, . . .



Obr.č. 32

ÚLOHA 6.9

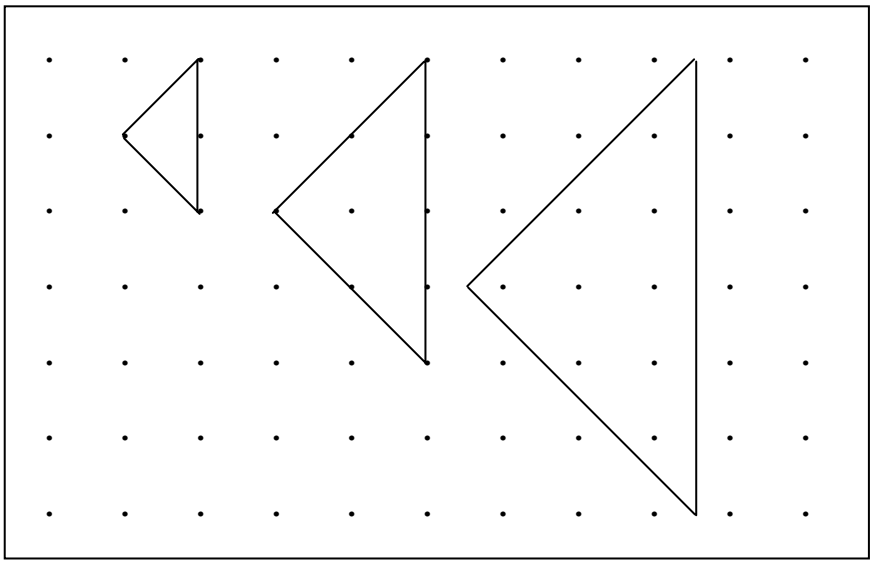
Na obrázku č. 36 je nakreslený útvar. Hľadajte v ňom podobné útvary.



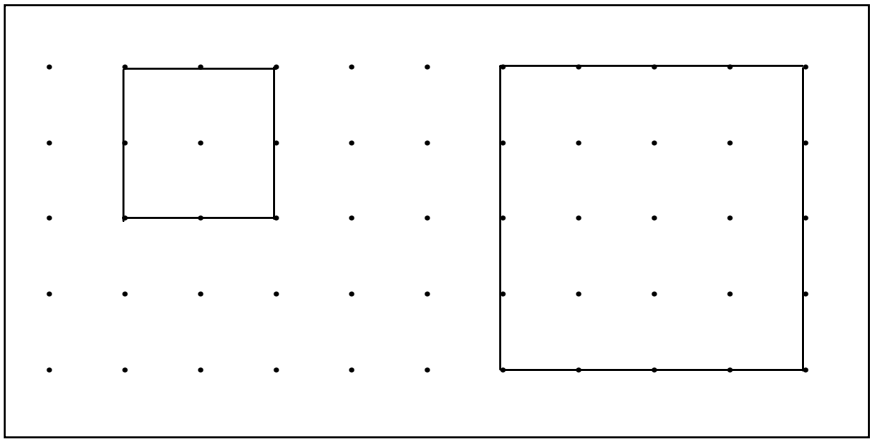
Obr. č. 33

Riešenie:

Môžeme si vybrať viacero podobných útvarov. Napríklad trojuholníky, štvorce, obdĺžniky. Existuje veľa riešení tejto úlohy. Uvedieme niekoľko podobných trojuholníkov a štvorcov.



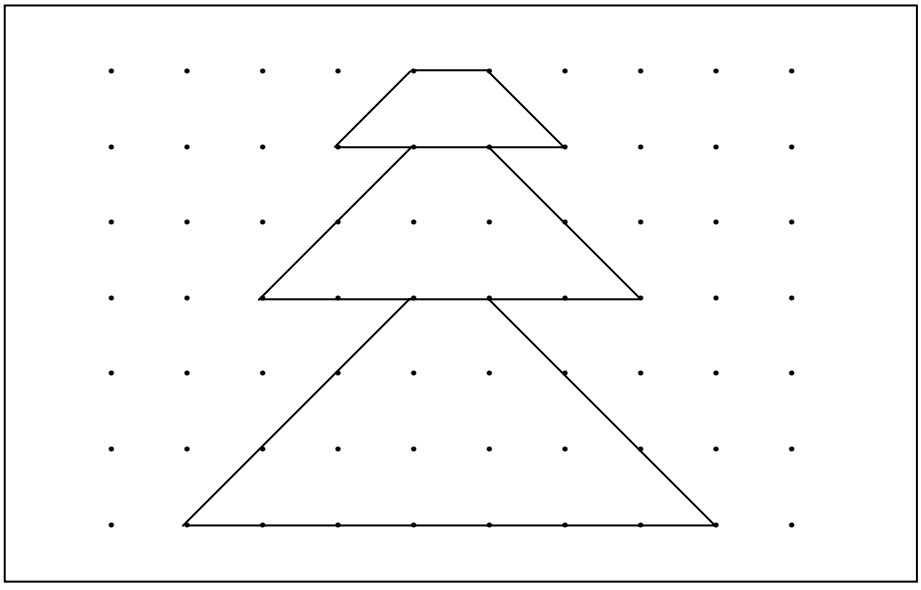
Obr. č. 34



Obr. č. 35

ÚLOHA 6.10

Zostrojte v štvorcovej sieti lichobežník s dĺžkami základní 1 a 3. Pod ním zostrojte ďalší lichobežník s dĺžkami základní 1 a 5. Zostrojte ďalšie lichobežníky podľa obrázka.



Obr. č.36

Určte veľkosť výšky každého lichobežníka. Čo viete povedať o ramenách lichobežníkov?

Riešenie:

Pozorovaním sme dospeli k týmto záverom:

- dĺžky výšok lichobežníkov tvoria aritmetickú postupnosť prirodzených čísel začínajúcu jednotkou,
- lichobežníky sú rovnoramenné,
- ramená lichobežníkov tvoria uhlopriečky štvorcov,
- dĺžky ramien sú postupne: $\sqrt{2}$, 2 . $\sqrt{2}$, 3 . $\sqrt{2}$, . . .

7 BODKY A PLOCHY

V tejto kapitole uvedieme spôsob organizácie hodiny matematiky, na ktorej budú žiaci objavovať tzv. Pickov vzorec. Tento vzorec je spojený s pojmom mrežový bod. Mrežovým bodom označujeme bod, ktorého súradnice sú celé čísla. Ak *M* je mrežový mnohouholník, t. j. mnohouholník, ktorého každý vrchol je mrežový bod, tak platí „Pickov vzorec“ (podľa [2]).

$$S = \frac{h}{2} + i - 1$$

Pomenujeme premenné vo vzorci:

S.....obsah mnohouholníka

h.....počet bodiek na obvode mnohouholníka

i.....počet bodiek vo vnútri mnohouholníka

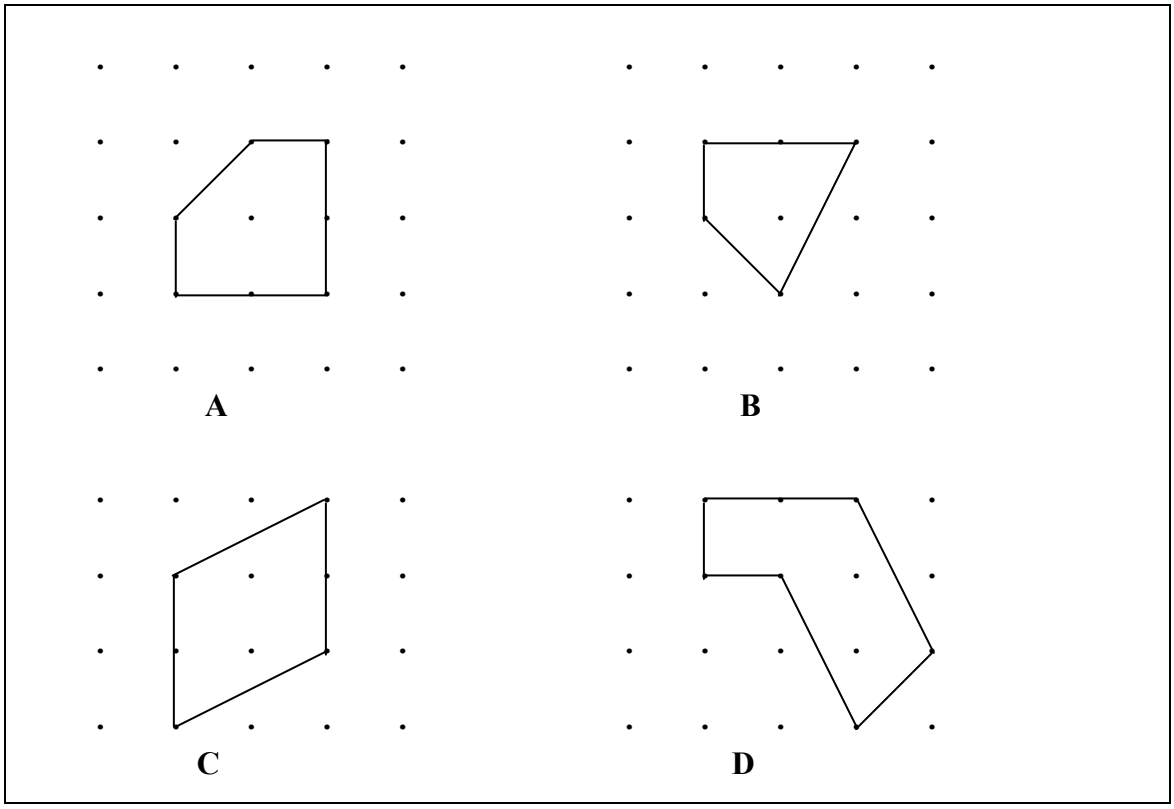
Budeme so žiakmi riešiť úlohy navádzajúce na objavenie vzorca na výpočet obsahu mnohouholníka. Žiaci potrebujú papier so štvorcovou sieťou, ceruzky, pravítka. Na papier budú žiaci rysovať mnohouholníky a počítať ich obsahy.

ÚLOHA 7.1

Narysuj na bodkovaný papier rôzne útvary a počítaj ich obsahy.
Pre každý útvar urč: Koľko bodiek leží na stranách útvarov?
Koľko bodiek leží vo vnútri útvaru?

Riešenie:

Žiaci vytvoria napr. útvary na nasledujúcom obrázku..



Obr. č. 37

Predtým ako budú žiaci počítať obsahy, zvolíme mierku. Jeden štvorček siete má obsah jednu jednotku. Žiaci zistia obsahy nakreslených útvarov. Povedia:

Útvar A má obsah 3, 5.

Na jeho stranách je 7 bodiek, vo vnútri má jednu bodku.

Útvar B má obsah 2 , 5.

Na jeho stranách je 5 bodiek a vo vnútri leží jedna.

Útvar C má obsah 4.

Na jeho stranách je 6 bodiek, vo vnútri má dve bodky.

Útvar D má obsah 4 , 5.

Na jeho stranách je 7 bodiek a vo vnútri sú dve bodky.

ÚLOHA 7.2

Nakresli na bodkovaný papier útvary s jednou bodkou vo vnútri. Nájdi obsah útvarov a spočítaj počet bodiek na obvode. Napíš výsledky do tabuľky.

Útvar	Počet bodiek vo vnútri	Počet bodiek na obvode	Obsah
A	1	7	3,5

Po zaplnení tabuľky sa žiakov spýtame, čo si všimli.

Mali by postrehnúť, že čísla v poslednom stĺpci sú polovicou čísel v predchádzajúcom stĺpci. Opýtame sa žiakov: Čo sa stane, ak budú vo vnútri útvaru 2, 3, 4 bodky? Táto otázka môže byť vhodnou motiváciou pre žiakov. Žiaci začnú hľadať ďalšie útvary, ktoré majú vo vnútri 2 bodky. Vyzveme žiakov, aby zaznamenávali údaje do tabuľky. Takto postupujeme ďalej až kým žiaci nezačnú vyslovovať hypotézy. Necháme žiakov, aby overovali svoje hypotézy. Niektorí žiaci nájdu správny vzorec rýchlejšie, iní pomalšie. Ak objaví vzorec väčšina žiakov, môžeme ukončiť prácu žiakov a diskutovať.